ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΛΗ ΤΗΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο Αλγεβρικές Παραστάσεις

Α. 1. 1

1. Τι ονομάζετε δύναμη α^ν με βάση τον πραγματικό α και εκθέτη το φυσικό ν>1;

- Ονομάζεται δύναμη α^ν με βάση τον αριθμό α και εκθέτη το φυσικό $\nu > 1$, το γινόμενο από ν παράγοντες ίσους με α.

$$\text{Δηλαδή, } \alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \cdots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

- Ορίζουμε ακόμη:

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^0 = 1 \text{ με } \alpha \neq 0$$

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \text{ με } \alpha \neq 0 \text{ και } \nu = 1,\ 2,\ 3, \ldots..$$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητές των δυνάμεων με βάση πραγματικό και εκθέτη ακέραιο ;

- Για δυνάμεις, με εκθέτες γενικά ακέραιους αριθμούς, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α. $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$ **β.** $\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ **γ.** $\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha \cdot \beta)^\nu$

δ. $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu = \dfrac{\beta^\nu}{\alpha^\nu}$ **ε.** $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$ **στ.** $\left(\alpha^\mu\right)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$

- Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

3. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού α;

- Ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α και συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ ο θετικός αριθμός ***x*** που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό ***α***.

$$\text{Επομένως : } \sqrt{\alpha} = x \text{ αν και μόνο αν } x^2 = \alpha \quad x, \alpha > 0$$

$$\text{Ορίζουμε ακόμη } \sqrt{0} = 0$$

4. Ποιες είναι οι ιδιότητές των ριζών;

- Από τον ορισμό τις τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού $\alpha \geq 0$ έχουμε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$
- Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- ***Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε*** $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$
- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

5. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι, $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\cdot\beta}$

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι αν οι α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$.

Έτσι:

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{\alpha}\right)^2\cdot\left(\sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta = \alpha\beta \text{ που ισχύει.}$$

6. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$ να αποδείξετε ότι, $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι αν οι α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$,

Έτσι:

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{\beta}\right)^2} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ που ισχύει.}$$

Α. 1. 2

7. Τι ονομάζεται αλγεβρική παράσταση;

- Ονομάζεται αλγεβρική παράσταση κάθε έκφραση που συνδυάζει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

8. Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης;

- Ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης ο αριθμός που θα προκύψει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις.

9. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ακέραια;

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ***ακέραια***, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

10. Τι ονομάζεται μονώνυμο και πια τα μέρη από τα οποία αποτελείται;

- Ονομάζεται μονώνυμο μια αλγεβρική παράσταση στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ αριθμού και μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών.
- Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας που γράφεται πρώτος ονομάζεται συντελεστής του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών ονομάζεται κύριο μέρος του μονωνύμου.

11. Ποια μονώνυμα ονομάζονται όμοια;

- Ονομάζονται όμοια δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

12. Ποια μονώνυμα ονομάζονται ίσα και ποια αντίθετα;

- Ονομάζονται ίσα δύο μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.
- Ονομάζονται αντίθετα δύο μονώνυμα που έχουν αντίθετο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.

13. Τι ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;

- Ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

14. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό μονώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;

- Ονομάζουμε σταθερό μονωνύμο κάθε αριθμό και μηδενικό μονώνυμο τον αριθμό 0.
- Το μηδενικό μονώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

15. Πως ορίζεται το άθροισμα ομοίων μονωνύμων;

- Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

16. Τι ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων;

- Ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων η πρόσθεση ομοίων μονωνύμων.

17. Πως ορίζεται το γινόμενο μονωνύμων;

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής **το** άθροισμα **των** εκθετών της.

Α. 1. 3

18. Τι ονομάζεται πολυώνυμο;

- Ονομάζεται πολυώνυμο ένα άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια.

19. Τι ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;

- Ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς την μεταβλητή αυτή.

20. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό πολυώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;

- Ονομάζουμε σταθερό πολυώνυμο κάθε αριθμό και μηδενικό πολυώνυμο τον αριθμό 0.
- Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά πολυώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

Α. 1. 4

21. Πως πολλαπλασιάζουμε:

   α. Μονώνυμο με πολυώνυμο ;

   β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο ;

Για να πολλαπλασιάσουμε:

α. Μονώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

β. Πολυώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Α. 1. 5

22. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

- Ονομάζεται ταυτότητα κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών αυτών.

23. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

ii. $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

iii. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

iv. $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

v. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$

vi. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

vii. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

Απόδειξη

i. $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^2+\underline{\underline{\alpha\cdot\beta}}+\underline{\underline{\beta\cdot\alpha}}+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\cdot\beta+\beta^2$

ii. $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\underline{\underline{\alpha\cdot\beta}}-\underline{\underline{\beta\cdot\alpha}}+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\cdot\beta+\beta^2$

iii. $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta)=(\alpha^2+2\alpha\cdot\beta+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta)=$

$=\alpha^3+\underline{2\alpha^2\cdot\beta}+\underline{\underline{\alpha\cdot\beta^2}}+\underline{\beta\cdot\alpha^2}+\underline{\underline{2\alpha\cdot\beta^2}}+\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2\cdot\beta+3\alpha\cdot\beta^2+\beta^3$

iv. $(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)^2\cdot(\alpha-\beta)=(\alpha^2-2\alpha\cdot\beta+\beta^2)\cdot(\alpha-\beta)=$

$=\alpha^3-\underline{2\alpha^2\cdot\beta}+\underline{\underline{\alpha\cdot\beta^2}}-\underline{\beta\cdot\alpha^2}+\underline{\underline{2\alpha\cdot\beta^2}}-\beta^3=\alpha^3-3\alpha^2\cdot\beta+3\alpha\cdot\beta^2-\beta^3$

v. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha-\beta^2$

vi. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\underline{\alpha^2\beta}+\underline{\underline{\alpha\beta^2}}-\underline{\beta\alpha^2}-\underline{\underline{\alpha\beta^2}}-\beta^3=\alpha^3-\beta^3$

vii. $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\underline{\alpha^2\beta}+\underline{\underline{\alpha\beta^2}}+\underline{\beta\alpha^2}-\underline{\underline{\alpha\beta^2}}+\beta^3=\alpha^3+\beta^3$

Α. 1. 6

24. Τι ονομάζεται παραγοντοποίηση;

- Ονομάζεται παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου ή γενικότερα μιας αλγεβρικής παράστασης η διαδικασία μετατροπής της παράστασης σε γινόμενο.

25. Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης;

κοινός παράγοντας

Όταν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

$$\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta = \alpha(\beta + \gamma - \delta)$$

ομαδοποίηση

Όταν όλοι οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες έτσι ώστε:

- Κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα,
- Οι παραστάσεις που μένουν μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα να είναι ίδιες

$$\alpha\beta + \alpha\gamma - \delta\beta - \delta\gamma = \alpha(\beta + \gamma) - \delta(\beta + \gamma) = (\beta + \gamma)(\alpha - \delta)$$

διαφορά τετραγώνων

Η μέθοδος αυτή παραγοντοποίησης στηρίζεται στην ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$, στην οποία αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε μια διαφορά δύο ***τελείων τετραγώνων*** σε γινόμενο.

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

άθροισμα ή διαφορά κύβων

Η παραγοντοποίηση του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο κύβων βασίζεται στις δύο γνωστές μας ταυτότητες:

$$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$$
$$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$$

Σε κάθε μια από τις οποίες αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε τη διαφορά ή το άθροισμα δύο ***κύβων*** σε γινόμενο.

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

ανάπτυγμα τετραγώνου

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \quad ή \quad \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2,$$

τότε θα γίνει αντίστοιχα

$$(\alpha + \beta)^2 \quad ή \quad (\alpha - \beta)^2,$$

που είναι γινόμενα παραγόντων αφού :

$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$ ***και*** $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$
$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

Παραγοντοποιήσει τριωνύμου της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει τη μορφή $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ έχουμε:

$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta =$

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)\cdot(x + \beta)$$

$\underline{x^2} + \underline{x\,\alpha} + \underline{x\,\beta} + \underline{\alpha\beta} =$ *Ομαδοποίηση*

$x(x+\alpha) + \beta(x+\alpha) =$ *Κοινός παράγοντας*

$(x+\alpha)(x+\beta)$

Α. 1. 7

26. Πως ορίζεται η διαίρεση δύο Πολυωνύμων;

Η διαίρεση δύο Πολυωνύμων είναι η διαδικασία εκείνη κατά την οποία μας δίνονται δύο πολυώνυμα ***Δ(x) (διαιρετέος)*** και ***δ(x) (διαιρέτης)*** με $\delta(x) \neq 0$ και βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων ***π(x) (πηλίκο)*** και ***υ(x) (υπόλοιπο)***, για τα οποία ισχύει:

$$\Delta(x) = \delta(x)\cdot\pi(x) + \upsilon(x) \qquad \textbf{(Ταυτότητα Ευκλείδειας διαίρεσης)}$$

Το ***υ (x)*** είναι ίσο με μηδέν οπότε η διαίρεση λέγεται ***τέλεια*** και το ***δ(x)*** είναι παράγοντας του ***Δ(x)*** ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του ***δ(x)***.

Α. 1. 8

27. Τι ονομάζεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) και τι Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

Α. 1. 9

28. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή;

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή όταν είναι κλάσμα με όρους πολυώνυμα.

29. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται;

Μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιέχει εκτός απ’ αυτές που μηδενίζουν τον παρανομαστή αφού όπως γνωρίζουμε δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

30. Πότε μια ρητή αλγεβρική παράσταση μπορεί να απλοποιηθεί;

Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.

Α. 1. 10

31. Πως κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις;

Για να κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθούμε τους κανόνες που ισχύουν για τις πράξεις των κλασμάτων.

Δηλαδή:

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta}$ ***και*** $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta}$

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}$ ***και*** $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta}$ $\beta\delta\neq 0$

$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$ ***και*** $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$ $\beta\gamma\delta\neq 0$

$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$ $\beta\gamma\delta\neq 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2° Εξισώσεις Ανισώσεις

Α. 2. 1

32. Τι ονομάζεται εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο;

- Ονομάζεται εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής $\alpha x+\beta=0$ με $\alpha\neq 0$.
- Ο α λέγεται συντελεστής του αγνώστου και ο β σταθερός (ή γνωστός) όρος.
- Ρίζα της εξίσωσης ονομάζεται ο αριθμός που αν αντικαταστήσει τον χ στην
- εξίσωση προκύπτει ισότητα που αληθεύει.
- Επίλυση μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την οποία βρίσκουμε τη λύση της.

33. Πότε η εξίσωση αx + β = 0 έχει μία λύση πότε είναι αδύνατη και πότε αόριστη;

- Αν $\alpha\neq 0$, η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ έχει ***μοναδική λύση*** την $x=-\frac{\beta}{\alpha}$
- Αν $\alpha=0$, και $\beta\neq 0$ η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ γράφεται $0\cdot x=-\beta$ και δεν έχει λύση ***(αδύνατη),***
- Αν $\alpha=0$, και $\beta=0$, η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ γράφεται $0\cdot x=0$ οπότε κάθε αριθμός είναι λύση της ***(ταυτότητα ή αόριστη)***.

Α. 2. 2

34. Τι ονομάζεται εξίσωση2ου βαθμού, με έναν άγνωστο ;

- Ονομάζεται εξίσωση δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής
- $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha\neq 0$.
- Οι αριθμοί α και β ονομάζονται συντελεστές του δευτεροβαθμίου και πρωτοβαθμίου όρου αντίστοιχα και ο αριθμός γ σταθερός όρος.
- Επίλυση μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την
- οποία βρίσκουμε τις τιμές του x που την επαληθεύουν.

35. Να αποδείξετε τον τύπο που δίνει την λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $α \neq 0$.

Απόδειξη

- Για την απόδειξη του τύπου αυτού θα εφαρμόσουμε την μέθοδο « συμπλήρωσης τετραγώνου» Για την εξίσωση λοιπόν $αx^2 + βx + γ = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $α \neq 0$ έχουμε διαδοχικά:

  $αx^2 + βx + γ = 0$

  $4α^2x^2 + 4αβx + 4αγ = 0$ [Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας με 4α]

  $4α^2x^2 + 4αβx = -4αγ$ [Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο β΄ μέλος]

  $4α^2x^2 + 4αβx + β^2 = β^2 - 4αγ$ [Προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ισότητας το $β^2$]

  $(2αx)^2 + 2\cdot 2αx\cdot β + β^2 = β^2 - 4αγ$ [Στο α΄ μέλος έχουμε το ανάπτυγμα του $(2αχ + β)^2$]

  $(2αχ + β)^2 = β^2 - 4αγ$

Την παράσταση $\mathbf{β^2 - 4αγ}$ ονομάζουμε διακρίνουσα και την συμβολίζουμε με **Δ** οπότε η εξίσωση $(2αχ + β)^2 = β^2 - 4αγ$ γράφεται $(2αχ + β)^2 = Δ$ **(i)**

Αν **Δ ≥ 0** από την **(i)** έχουμε: $(2αχ + β)^2 = \left(\sqrt{Δ}\right)^2$

$$2αx + β = \pm\sqrt{Δ}$$

$$2αx = -β \pm \sqrt{Δ}$$

$$x = \frac{β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$$

Αν **Δ < 0** ή εξίσωση είναι **αδύνατη** αφού είναι αδύνατον να ισχύει η εξίσωση **(I)**

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $α \neq 0$ δίδονται από τον τύπο $x = \frac{β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$ και υπάρχουν μόνο εφ' όσον **Δ ≥ 0**

36. Πότε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού:

α. έχει δύο άνισες ρίζες;

β. έχει μια διπλή ρίζα ;

γ. δεν έχει ρίζες;

Η εξίσωση $αχ^2 + βχ + γ = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς, $α \neq 0$ και διακρίνουσα

$$\mathbf{Δ = β^2 - 4αγ:}$$

α. έχει δύο ρίζες άνισες που δίνονται από τον τύπο $x = \frac{β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$, όταν **Δ > 0**

β. έχει δύο ρίζες ίσες που δίνονται από τον τύπο $x = \frac{-β}{2α}$, όταν **Δ = 0**

γ. δεν έχει ρίζες, όταν **Δ < 0**

37. Πως παραγοντοποιείται το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$ όταν η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ με

$α \neq 0$ έχει λύσεις τις $ρ_1$, $ρ_2$;

- Αν $ρ_1$, $ρ_2$ είναι λύσεις της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$ το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο:

$$αx^2 + βx + γ = α\cdot(x- ρ_1)\cdot(x-ρ_2)$$

Α. 2. 4

38. Τι ονομάζεται κλασματική εξίσωση και πότε ορίζεται αυτή;

Ονομάζεται κλασματική εξίσωση, κάθε εξίσωση που περιέχει άγνωστο στον παρανομαστή. Για να ορίζεται μια κλασματική εξίσωση, πρέπει οι παρανομαστές των κλασμάτων της να είναι διάφοροι του μηδενός.

Α. 2. 5

39. Πως συγκρίνουμε(διατάσουμε) δύο πραγματικούς αριθμούς;

- Αν οι α και β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε:
- Λέμε ότι ο α είναι μεγαλύτερος του β και το συμβολίζουμε $α > β$, όταν $α - β> 0$.
- Λέμε ότι ο α είναι μικρότερος του β και το συμβολίζουμε $α < β$, όταν $α - β < 0$.
- Λέμε ότι ο α είναι ίσος με τον β και το συμβολίζουμε $α = β$, όταν $α - β = 0$.

Αντίστροφα

- Αν $α - β > 0$, τότε ο α είναι μεγαλύτερος του β.
- Αν $α - β < 0$, τότε ο α είναι μικρότερο του β.
- Αν $α - β = 0$, τότε ο α είναι ίσος με τον β.

40. Τι ονομάζεται ανισότητα και ποια τα χαρακτηριστικά της;

- Η σχέση της μορφής $α > β$ (ή $α < β$) ονομάζεται ανισότητα με μέλη, πρώτο και δεύτερο, τα α και β (ή τα β και α) αντίστοιχα.
- Οι ανισότητες $α < β$ και $γ < δ$ (ή $α > β$ και $γ > δ$) λέγονται ομοιόστροφες (έχουν την ίδια φορά)
- Οι ανισότητες $α < β$ και $γ > δ$ (ή $α > β$ και $γ < δ$) λέγονται ετερόστροφες (έχουν αντίθετη φορά)
- Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός α είναι ταυτόχρονα μεγαλύτερος του x και μικρότερος του y, γράφουμε τη « διπλή » ανισότητα $x < α < y$.
- Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός x είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό α, γράφουμε $x \geq α$.

41. Ποιες είναι οι ιδιότητες της διάταξης;

- Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δηλαδή αν $α > β$, τότε $α + γ > β + γ$.

- Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.

  Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.

  Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς.

  Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

  Δηλαδή αν α, β, γ, δ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

Α. 3. 1

42. Τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και τι λύση της;

- Ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$.
- Λύση της γραμμική εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

43. Πως παριστάνεται γραφικά κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ και τι ισχύει γι' αυτή;

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνεται γραφικά με μια ευθεία **ε** έτσι ώστε:

- Αν ένα σημείο ανήκει στην ευθεία, ε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ το σημείο ανήκει στην ευθεία ε .

44. Τι παριστάνουν οι εξισώσεις;

α. $y = k$ με $k \neq 0$

β. $y = 0$

γ. $x = k$ με $k \neq 0$

δ. $x = 0$

α. Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, k)

β. Η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα x΄x.

γ. Η εξίσωση $x = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο (k, 0)

δ. Η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα y΄y.

45. Πως βρίσκουμε τις τομές μιας ευθείας $αx + βy = γ$ με $α \neq 0$ και $β \neq 0$ με τους άξονες x΄x και y΄y;

Κάθε σημείο του x΄x έχει τεταγμένη 0, οπότε και το Α, σημείο τομής της $αx + βy = γ$ με τον x΄x, θα έχει τεταγμένη $y = 0$ και τετμημένη x με $αx + β\cdot 0 = γ$ ή $αx = γ$ ή $x = \frac{γ}{α}$. Άρα $Α(\frac{γ}{α}, 0)$

Κάθε σημείο του y΄y έχει τετμημένη 0, οπότε και το Β, σημείο τομής της $αx + βy = γ$ με τον y΄y, θα έχει τετμημένη $x = 0$ και τεταγμένη y με $α\cdot 0 + βy = γ$ ή $βy = γ$ ή $y = \frac{γ}{β}$. Άρα $Β(0, \frac{γ}{β})$

Α. 3. 2

46. Τι ονομάζεται;

α. Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

β. Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

γ. Επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

α. Ονομάζεται γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ένα σύστημα της μορφής, $\begin{cases} αx + αy = γ \\ α΄x + β΄y = γ΄ \end{cases}$ με ένα τουλάχιστον από τα α, β, α΄, β΄ $\neq 0$.

β. Ονομάζεται λύση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y κάθε ζεύγος (x_0, y_0) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

γ. Ονομάζεται επίλυση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y η διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε κάθε ζεύγος (x_0, y_0) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

47. Πως γίνεται η γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y και πότε αυτό έχει μία λύση, είναι αδύνατο, είναι αόριστο;

Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες που παριστάνουν τις εξισώσεις του συστήματος και:

- αν τέμνονται το σύστημα έχει ***μία λύση*** τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.

- αν είναι παράλληλες δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε το σύστημα *δεν έχει λύση* και λέμε ότι είναι ***αδύνατο.***
- Αν ***συμπίπτουν (ταυτίζονται)*** έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει ***άπειρες λύσεις*** και λέμε ότι είναι ***αόριστο***.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^o Συναρτήσεις

Α. 4. 1

48. Τι γνωρίζεται για την συνάρτηση $y = αx^2$ με $α > 0$;

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2$ με $α > 0$ είναι μια καμπύλη που ονομάζεται ***παραβολή***.
- Η παραβολή που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2$ με $α > 0$ έχει ***κορυφή*** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x΄x και πάνω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \geq 0$.
- Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α > 0$ παίρνει ***ελάχιστη τιμή*** $y = 0$, όταν $x = 0$,
- Για αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $y = αx^2$ με $α > 0$ έχει ***άξονα συμμετρίας*** τον άξονα y΄y.
- Όταν η τιμή του α αυξάνεται, τότε το «άνοιγμα» της παραβολή «κλείνει».

Α. 4. 1

49. Τι γνωρίζεται για την συνάρτηση $y = αx^2$ με $α < 0$;

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2$ με $α < 0$ είναι μια καμπύλη που ονομάζεται ***παραβολή***.
- Η παραβολή που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2$ με $α < 0$ έχει ***κορυφή*** το σημείο Ο(0, 0) και βρίσκεται από τον άξονα x΄x και κάτω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει $y \leq 0$.
- Η συνάρτηση $y = αx^2$ με $α > 0$ παίρνει ***μέγιστη τιμή*** $y = 0$, όταν $x = 0$,
- Για αντίθετες τιμές του x αντιστοιχεί η ίδια τιμή του y, που σημαίνει ότι η παραβολή $y = αx^2$ με $α < 0$ έχει ***άξονα συμμετρίας*** τον άξονα y΄y.
- Όταν η απόλυτη τιμή του α αυξάνεται, τότε το «άνοιγμα» της παραβολή «κλείνει».

Α. 4. 2

50. Ποια συνάρτηση ονομάζεται τετραγωνική;

Ονομάζεται τετραγωνική κάθε συνάρτηση της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$.

51. Τι γνωρίζεται για τη συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$;

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $γ = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$ είναι παραβολή με:

- Κορυφή το σημείο $K(-\frac{β}{2α}, -\frac{Δ}{4α})$ όπου $Δ = β^2 - 4αγ$
- Άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Κ και έχει εξίσωση $x = -\frac{β}{2α}$
- Αν $α > 0$, η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ παίρνει ελάχιστη τιμή $y = -\frac{Δ}{4α}$ όταν $x = -\frac{β}{2α}$
- Αν $α < 0$, η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ παίρνει μέγιστη τιμή $y = -\frac{Δ}{4α}$ όταν $x = -\frac{β}{2α}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5° Πιθανότητες

52. Τι είναι το σύνολο;

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που καθορίζονται με απόλυτη σαφήνεια και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

53. Πως μπορεί παρασταθεί ένα σύνολο;

Ένα σύνολο μπορεί να παρασταθεί με **αναγραφή** ή με **περιγραφή** των στοιχείων του και με το **διάγραμμα Venn.**

54. Πότε δύο σύνολα λέγονται ίσα;

Ίσα ονομάζονται δύο σύνολα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

55. Πότε ένα σύνολο Α ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου Β;

Ένα σύνολο Α ονομάζεται ***υποσύνολο*** ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β και συμβολίζεται $A \subseteq B$.

56. Τι ονομάζεται κενό σύνολο και πως συμβολίζεται ;

Ονομάζεται ***κενό*** σύνολο το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο. Το ***κενό*** σύνολο συμβολίζεται με $\varnothing$.

57. Τι ονομάζεται ένωση δύο συνόλων Α, Β και πως συμβολίζεται;

Ένωση δύο συνόλων ***Α, Β*** ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο συνόλων και συμβολίζεται με $A \cup B$.

58. Τι ονομάζεται τομή δύο συνόλων Α, Β και πως συμβολίζεται;

Τομή δύο συνόλων ***Α, Β*** ονομάζεται ένα νέο σύνολο που έχει ως στοιχεία τα κοινά στοιχεία και των δύο συνόλων και συμβολίζεται $A \cap B$.

59. Τι ονομάζεται συμπλήρωμα ενός συνόλου Α ως προς ένα βασικό σύνολο Ω και πως συμβολίζεται;

Συμπλήρωμα ενός συνόλου ***Α*** ως προς ένα βασικό σύνολο ***Ω*** ονομάζεται το σύνολό που έχει όλα τα στοιχεία του ***Ω*** που δεν ανήκουν στο ***Α*** και συμβολίζεται με ***Α΄***.

60. Τι ονομάζεται πείραμα τύχης;

Πείραμα τύχης ονομάζεται κάθε πείραμα που όσες φορές και αν το επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του με απόλυτη βεβαιότητα.

61. Τι ονομάζεται δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και πως συμβολίζεται;

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με Ω.

62. Τι ονομάζεται ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης και πότε αυτό πραγματοποιείται;

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.

Ένα ενδεχόμενο πραγματοποιείται, όταν το αποτέλεσμα του πειράματος σε μια συγκεκριμένη εκτέλεση του είναι στοιχείο του ενδεχομένου.

63. Ποιο ενδεχόμενο ονομάζεται βέβαιο και ποιο αδύνατο σε ένα πειράματος τύχης;

Βέβαιο ενδεχόμενο σε ένα πείραμα τύχης ονομάζεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος.

Αδύνατο ενδεχόμενο σε ένα πείραμα τύχης ονομάζεται το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος.

64. Πότε δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος τύχης ονομάζονται ασυμβίβαστα;

Δύο ενδεχόμενα ***Α και Β*** ενός πειράματος τύχης ονομάζονται ασυμβίβαστα όταν $A \cap B = 0$.

65. Τι ονομάζεται συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου Α;

Ονομάζεται συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου Α το ενδεχόμενο Α΄ που πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α.

66. Τι ονομάζεται πιθανότητα P(A) ενός ενδεχόμενου Α σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα και ποιες οι ιδιότητες της;

- Ονομάζεται πιθανότητα ενός ενδεχόμενου Α σε ένα πείραμα τύχης με ισοπίθανα αποτελέσματα ο αριθμός $P(A) = \dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$
- Από τον ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι:
  - $P(\Omega) = \dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$ και $P(\varnothing) = \dfrac{N(\varnothing)}{N(\Omega)} = 0$
- Για κάθε ενδεχόμενο ***Α*** ενός δειγματικού χώρου *Ω* ισχύει $O \leq P(A) \leq 1$.

67. Ποιοι είναι Βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων;

Σ' ένα πείραμα τύχης

- Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο Α ισχύει $P(A) + P(A΄) = 1$
- Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ισχύει $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.