

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Τι λέγεται ταυτότητα;
- B.** Να γράψετε 5 ταυτότητες συνδέοντας με = τις παραστάσεις της Ομάδας Α με τις σωστές παραστάσεις από την Ομάδα Β.

ΟΜΑΔΑ Α	ΟΜΑΔΑ Β
$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$	$\alpha^2 + \beta^2$
$(\alpha + \beta)^2$	$\alpha^3 + \beta^3$
$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$	$\alpha^2 - \beta^2$
$(\alpha + \beta)^3$	$\alpha^3 - \beta^3$
$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$	$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
	$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

- Γ.** Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Θέμα 2^ο

- A.** Ποια πρόταση λέγεται θεώρημα του Θαλή; (σχήμα και προτάσεις)
- B.** Να αναφέρετε την εφαρμογή του θεωρήματος Θαλή στο τρίγωνο (σχήμα και πρόταση).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Δίνονται οι παρακάτω εξισώσεις. Να δείξετε ότι μόνο μία από αυτές δεν είναι αδύνατη και να βρείτε τις λύσεις της:

$$3x^2 + 5 = 0, 3x^2 - 5x + 4 = 0, 3x^2 - 5x + 2 = 0$$

Άσκηση 2^η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $\alpha = 8\text{m}$, $\beta = 9\text{m}$ και $\gamma = 10\text{m}$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες Α, Β και Γ του τριγώνου.

Άσκηση 3^η

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 14 = \frac{3y}{4} \\ \frac{x+1}{3} + 8 = \frac{y-2}{5} \end{cases}$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Τι λέγεται ταυτότητα;

B. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

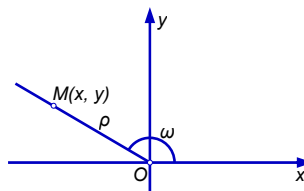
$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Γ. Να γράψετε σε παραγοντοποιημένη μορφή τις παραστάσεις (μόνο το αποτέλεσμα):

A. $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 =$

B. $\alpha^2 - \beta^2 =$

Γ. $\alpha^3 + \beta^3 =$



Θέμα 2^ο

A. Με τη βοήθεια του σχήματος να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω (ημω, συνω, εφω).

B. Να αποδείξετε ότι, για μια γωνία ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$, ισχύει:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{12}{x^2-3x} - \frac{x-2}{x}$$

Άσκηση 2^η

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3(x-2y) + 2(2x-y) = 6 \\ \frac{x+y}{5} - \frac{x-y}{2} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

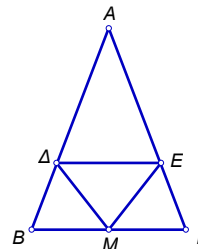
Άσκηση 3^η

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με AB = ΑΓ και το σημείο Μ είναι μέσο της ΒΓ.

Επίσης ισχύει ότι ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

A. το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές.

B. τα τρίγωνα ABΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Τι ονομάζεται ταυτότητα;
B. Να συμπληρωθούν οι ταυτότητες:
 $\alpha^2 - \beta^2 = \dots\dots$
 $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots$
Γ. Αποδείξτε την ταυτότητα:
 $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Θέμα 2^ο

- A.** Να οριστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τυχαίας γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$
B. Να αποδειχτεί η ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.
(Να γίνει το κατάλληλο σχήμα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

- A.** Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x} \text{ και } B = \frac{2x}{x^2 - 2x}$$

- B.** Να λυθεί η εξίσωση: $A + B = \frac{4}{x^2 - 2x}$,

όπου A και B οι απλοποιημένες παραστάσεις του α ερωτήματος.

Άσκηση 2^η

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{3x + 2}{4} - \frac{y + 5}{6} = 1 \\ 4y - (x - 2y) = x + 2 \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = ΑΓ). Στις προεκτάσεις της βάσης ΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

- A.** Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι ίσα.
B. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

ΘΕΩΡΙΑ

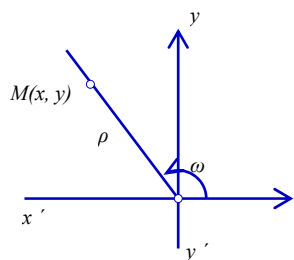
Θέμα 1^ο

A. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με βάση τις συντεταγμένες του σημείου $M(x, y)$

α. Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \text{χο}M$.

β. Να αποδείξετε την ισότητα: $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.

γ. Υπάρχει γωνία, ώστε $\eta\mu\omega = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$;
(Να υπάρξει δικαιολόγηση).



Θέμα 2^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \dots\dots \alpha \beta \quad \beta - \alpha$$

B. Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $\alpha^3 \beta^3 = \alpha \beta \alpha^2 - \alpha\beta \beta^2$

Γ. Είναι σωστή η ισότητα: $\alpha - \beta^2 = \beta - \alpha^2$;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί η εξίσωση:

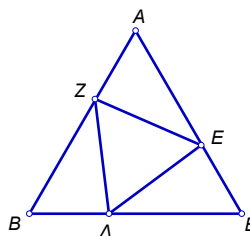
$$6x^2 - 2x - 8 = 0$$

Άσκηση 2^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{4x}{3} - \frac{y-1}{2} = 3 \\ \frac{3x}{2} - \frac{9y-1}{4} = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ κάθε πλευρά είναι 8cm και τα $AZ, B\Delta, \Gamma E$ είναι 3cm. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

α. $(\alpha - \beta)^2 =$

β. $(\alpha + \beta)^3 =$

γ. $(\alpha + \beta)(\beta - \alpha) =$

B. Να συμπληρωθεί και να αποδειχθεί η ταυτότητα: $\alpha^3 - \beta^3 =$

Θέμα 2^ο

A. Να διατυπωθούν τα κριτήρια ισότητας δύο τυχαίων τριγώνων

(κανόνας και σχήμα για κάθε περίπτωση)

B. Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια (κανόνας)

Γ. Τα όμοια τρίγωνα είναι και ίσα;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

A. Να παραγοντοποιηθούν και να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 4x}$$

$$B = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\Gamma = \frac{4x}{x^3 - 2x^2}$$

B. Να λυθεί η εξίσωση: $A + B = \Gamma$ όπου A, B και Γ οι απλοποιημένες παραστάσεις του πρώτου ερωτήματος.

Άσκηση 2^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 3x - y = 11 \\ \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

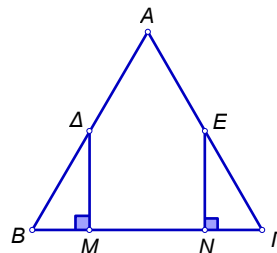
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ).

Από τα μέσα Δ και Ε των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα φέρνουμε ΔΜ και ΕΝ κάθετα στη ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

A. Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΕΝΓ είναι ίσα.

B. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις σχέσεις που ακολουθούν ώστε να προκύψουν γνωστές ταυτότητες:

α. $(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots$

β. $(\alpha + \beta)^3 = \dots\dots$

γ. $\alpha^2 - \beta^2 = \dots\dots$

δ. $\alpha^3 - \beta^3 = \dots\dots$

B. Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ):

α. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - \beta^3$

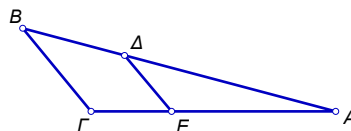
β. $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x - \alpha)(x - \beta)$

Θέμα 2^ο

A. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή.

B. Να κάνετε το αντίστοιχο σχήμα και να γράψετε τη σχέση που το εκφράζει.

Γ. Στο διπλανό σχήμα είναι $DE \parallel BF$. Να γράψετε τη σχέση που ισχύει λόγω αυτής της παραλληλίας.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Δίνονται οι εξισώσεις: $2x^2 - 9x - 5 = 0$ και $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

A. Να λύσετε τις παραπάνω εξισώσεις.

B. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$2x^2 - 9x - 5 = 0$ και $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Γ. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{2x^2 - 9x - 5}{4x^2 + 4x + 1}$.

Άσκηση 2^η

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$A = \eta\mu 150^\circ + \sigma\upsilon\nu 160^\circ - \eta\mu 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ + \epsilon\phi 130^\circ + \epsilon\phi 50^\circ$.

Άσκηση 3^η

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{3} = 3 \\ \frac{x+4}{3} - \frac{y-6}{2} = 4 \end{cases}$$

Να το φέρετε στη μορφή, $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ και στη συνέχεια να το λύσετε.

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρωθούν οι παρακάτω ταυτότητες:

α. $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) =$

β. $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) =$

γ. $(\alpha - \beta)^3 =$

δ. $(\alpha + \beta)^2 =$

B. Να αποδειχτεί η ταυτότητα:

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3 \cdot \alpha^2\beta + 3 \cdot \alpha\beta^2 + \beta^3$$

Θέμα 2^ο

A. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων.

B. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή (δώστε το σχήμα και τη σχέση που ισχύει).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λύσετε την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{2-x}{x-3} - \frac{x+3}{x+4} = \frac{5}{x^2+x-12}$$

Άσκηση 2^η

Να λύσετε το παρακάτω σύστημα:
$$\begin{cases} 2(x-1) - 3(y+2) = 4 \\ 5x - 4(y-2) = 3(x+5) \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = \eta\mu 135^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ \cdot \epsilon\phi 150^\circ =$$

$$B = \frac{\eta\mu 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 135^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ}{\epsilon\phi 150^\circ}$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

$$(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \dots\dots\dots$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$$

B. Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$

Θέμα 2^ο

A. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων.

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και (Λ) αν είναι λανθασμένες:

α. Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

β. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.

γ. Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση:

$$(2x + 3)^2 + x(x - 2)^2 - (2x - 1)(2x + 1)$$

Άσκηση 2^η

Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ \frac{x + 4}{3} - \frac{y - 6}{2} = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\sin \omega = -\frac{3}{5}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A. Δώστε τον ορισμό του μονώνυμου.
- B. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες:
 - α. $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$
 - β. $\alpha^3 - \beta^3 = \dots\dots\dots$
- Γ. Να αποδείξετε ότι $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Θέμα 2^ο

- A. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων.
- B. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή.
- Γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω είναι: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$A(x) = x(x - 2) + 1 + (2 - x)^2 - [x(x - 4) + 4]$ και

$B(x) = x^2(x + 5) - (x + 5)$.

- A. Να αποδείξετε ότι $A(x) = x^2 - 2x + 1$.
- B. Να παραγοντοποιήσετε τα $A(x)$ και $B(x)$ και να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\Gamma(x) = \frac{A(x)}{B(x)}, \text{ δείχνοντας ότι ισούται με } \frac{x - 1}{(x + 5)(x + 1)}.$$

- Γ. Να λύσετε την εξίσωση $\Gamma(x) = 1$ δείχνοντας ότι οι ρίζες της είναι το -2 και το -3 .

Άσκηση 2^η

A. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 1 - \frac{x}{2} = \frac{x - 2y}{3} \\ x - \frac{2x - y}{4} = \frac{y}{2} \end{cases}$$

δείχνοντας ότι η λύση του είναι $(x, y) = (-2, -4)$.

- B. Για τις τιμές των x και y του πρώτου ερωτήματος να αποδείξετε ότι:
 $-x(-\alpha - \beta)^2 + y(-\beta + \alpha)^2 = -2[\alpha(\alpha - 6\beta) + \beta^2]$
- Γ. Να αποδείξετε ότι η λύση του συστήματος του πρώτου ερωτήματος είναι κορυφή της τετραγωνικής συνάρτησης $y = x^2 + 4x$.

Άσκηση 3^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma$. Αν M μέσο της $B\Gamma$ και P και N μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τότε:

- A. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα BMP και $MN\Gamma$ είναι ίσα.
- B. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $MN\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια με λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.
- Γ. Αν $\omega = \widehat{NMG}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \lambda + \frac{3}{10}$ να αποδείξετε ότι: $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu(180^\circ - \Gamma) - \epsilon\phi\omega}{\epsilon\phi\omega - \sigma\upsilon\nu(180^\circ - B)} = \frac{13}{31}$.

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

$$(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = \dots\dots$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \dots\dots$$

B. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Γ. Πότε ισχύει ο τύπος: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$

Θέμα 2^ο

Να γράψετε:

A. Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους (κριτήρια ισότητας τριγώνων)

B. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους (κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Β και παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε ΑΔ = ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε, έτσι ώστε ΑΒ = ΑΕ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΒΓ.

Άσκηση 2^η

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{4}{x^2 - x - 2} - \frac{2x}{3(x - 2)} = \frac{x + 5}{-2 - 2x}$$

Άσκηση 3^η

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις Α και Β:

$$A = (\eta\mu 25^\circ + \sigma\upsilon\nu 25^\circ)^2 + (\sigma\upsilon\nu 155^\circ + \eta\mu 155^\circ)^2$$

$$B = \eta\mu^4 \alpha - \sigma\upsilon\nu^4 \alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha$$