

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

$$(\alpha + \beta)^2 = \dots, (\alpha - \beta)^3 = \dots \text{ και } (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots$$

B. Να αποδείξετε τη δεύτερη.

Θέμα 2^ο

Να γράψετε τα τρία (3) κριτήρια ισότητας τριγώνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x}{x-3} + \frac{2}{4-x} = \frac{x}{x^2 - 7x + 12}$$

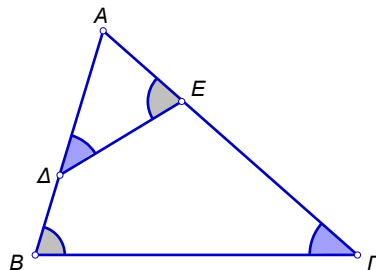
Άσκηση 2^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2 \cdot (5x + 3y) - 5 \cdot (x - 2y) = 22 \\ 4x - 3y = 5x - 8y + 12 \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{AE\Delta}$, $\widehat{A\Delta E} = \widehat{A\Gamma B}$ και $AB = 6\text{cm}$, $A\Gamma = 10\text{cm}$, $B\Gamma = 12\text{cm}$, $A\Delta = 4\text{cm}$.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια.
- Να γραφούν οι ίσοι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών.
- Να υπολογιστούν τα AE και ΔE .



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$.

B. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν:

α. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

β. $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

Θέμα 2^ο

A. Ποια είναι η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο;

B. Ποια παράσταση ονομάζουμε διακρίνουσα;

Γ. Να αντιστοιχίσετε τα ερωτήματα της στήλης (A) με τις απαντήσεις της στήλης (B) στον παρακάτω πίνακα γνωρίζοντας ότι αναφέρονται σε εξίσωση 2^{ου} βαθμού:

Στήλη A Διακρίνουσα	Στήλη B Λύσεις εξίσωσης
A. $\Delta > 0$	α. Διπλή λύση
B. $\Delta < 0$	β. Αόριστη
Γ. $\Delta = 0$	γ. Αδύνατη
	δ. Δύο λύσεις άνισες

Μία απάντηση της στήλης (B) περισσεύει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = AΓ) και ένα σημείο O στο εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο ώστε να ισχύει OB = OΓ. Να αποδειχθούν ότι:

A. $\widehat{OB\Gamma} = \widehat{O\Gamma B}$

B. $\widehat{ABO} = \widehat{A\Gamma O}$

Γ. Τα τρίγωνα ABO και AΓO είναι ίσα μεταξύ τους.

Άσκηση 2^η

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3x-4}{x^2-5x+6} + \frac{x}{3-x} + \frac{2}{x-2} = 0$$

Άσκηση 3^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

Να αποδείξετε τις αξιοσημείωτες ταυτότητες:

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Θέμα 2^ο

Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \text{ (Να γίνει σχήμα)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

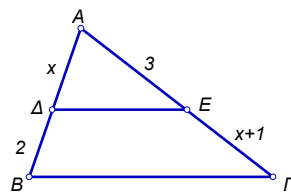
Να γίνουν οι πράξεις: $\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{1}{\alpha^2 + \alpha\beta} - \frac{1}{2\alpha^2 - 2\alpha\beta}$

Άσκηση 2^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{3x}{2} = 6 - \frac{y}{5} \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y-3}{6} = 2 \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Στο διπλανό σχήμα (σκαρίφημα) να βρεθεί το x αν είναι γνωστό ότι ισχύει ΔΕ // ΒΓ.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Τι λέγεται μονώνυμο και από τι αποτελείται;
Δώστε ένα παράδειγμα μονωνύμου στο οποίο και να αναφέρετε από τι αποτελείται.
- B.** Πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια; Δώστε ένα παράδειγμα.
- Γ.** Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς λ, μ ώστε η αλγεβρική παράσταση $2x^\lambda y^{\mu-2} + 3x^2y$ να είναι μονώνυμο.

Θέμα 2^ο

- A.** Τι ονομάζεται ταυτότητα;
- B.** Να αποδείξετε την ταυτότητα $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Γ.** Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:
 $(a + b)(a - b) =$
 $(a - b)^3 =$
 $a^3 + b^3 =$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και η διχοτόμος του ΑΔ. Έστω Μ τυχαίο σημείο της ΑΔ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 2^η

- A.** Αν $-1 < \alpha < 2$ και $1 < \beta < 5$, να συμπληρώσετε τα κενά.

$$\dots < 3\alpha < \dots, \dots < -\beta < \dots, \dots < 3\alpha - \beta < \dots$$

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).

- B.** Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$2x + 5 < \frac{x}{2} + 2 \text{ και } \frac{x-1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3}$$

Άσκηση 3^η

Να εξετάσετε αν έχουν κοινή λύση οι εξισώσεις:

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ και } \frac{3x-2}{x-3} - \frac{7x-12}{x^2-3x} = \frac{x-4}{x}.$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να διατυπώσετε το θεώρημα που αναφέρεται σε ίσα τμήματα μεταξύ παράλληλων ευθειών.
- B.** Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.
- Γ.** Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας δύο ορθογωνίων τριγώνων.

Θέμα 2^ο

- A.** Να αποδείξετε τη σχέση $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ (να γίνει σχήμα).
- B.** Ο τύπος $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ ισχύει για τις γωνίες των 0° , 90° και 180° ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- Γ.** Να γράψετε τους τύπους που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

- A.** Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

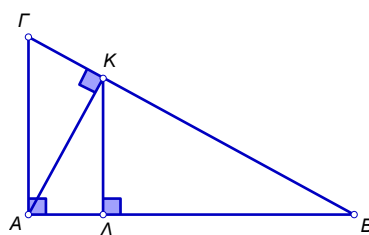
$$A = \frac{x^4 + 8x}{2x^4 - 4x^3 + 8x^2} \text{ και } B = \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8}$$

και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $A - B = 1$.

Άσκηση 2^η

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρνουμε το ύψος AK προς την υποτείνουσα. Από το K φέρνουμε την $K\Lambda$ κάθετη στην AB . Να αποδείξετε:

- A.** ότι τα τρίγωνα $AK\Gamma$, $AK\Lambda$ είναι όμοια και
- B.** ότι $AK^2 = A\Gamma \cdot K\Lambda$.



Άσκηση 3^η

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 + \beta x + 3$ διέρχεται από τα σημεία

$A(-2, -5)$ και $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$. Να βρείτε τα a , β και στη συνέχεια για $a = -1$ και $\beta = 2$ να

βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της παραπάνω συνάρτησης με τους άξονες x' και y' (υπολογιστικά).

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Να δώσετε τον ορισμό της ταυτότητας.

B. Να συμπληρώσετε και στη συνέχεια να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(α + β)^3 = \dots$$

Γ. Να χαρακτηρίσετε σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω σχέσεις:

α. $(α - β)^2 = (β - α)^2$

β. $(-α - β)^2 = -(α + β)^2$

γ. $α^2 - β^2 = (α + β)(β - α)$

Θέμα 2^ο

A. Με τη βοήθεια κατάλληλου σχήματος να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας αμβλείας γωνίας ω.

B. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$\eta\mu 180^\circ = \dots$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = \dots$$

$$\epsilon\phi 90^\circ = \dots$$

Γ. Να χαρακτηρίσετε σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις σχέσεις:

α. $\eta\mu^2 \omega = 1 + \sigma\upsilon\nu^2 \omega$

β. αν $\omega = 110^\circ$ τότε $\sigma\upsilon\nu \omega > 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

A. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{x(x^2 + 3x + 2)}{x^2 + 4x + 4} \text{ και } B = \frac{4x^2 - 8x}{2x^2 - 8}$$

B. Να λύσετε την εξίσωση: $B - A = 0$

Άσκηση 2^η

Δίνεται το πολυώνυμο $x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$.

Να βρείτε τα α, β αν η αριθμητική τιμή του

για $x = -1$ είναι 0 και για $x = 3$ είναι 24.

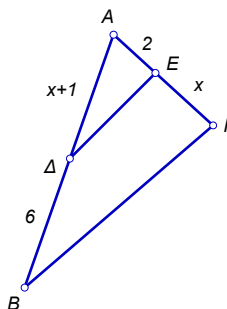
Άσκηση 3^η

Στο διπλανό σχήμα είναι $DE \parallel BG$.

A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα

$\triangle ADE$ και $\triangle ABG$ είναι όμοια.

B. Να υπολογίσετε το μήκος x.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Για κάθε πραγματικό αριθμό α και β να δείξετε ότι:

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

B. Να συμπληρώσετε τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων:

$$(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$$

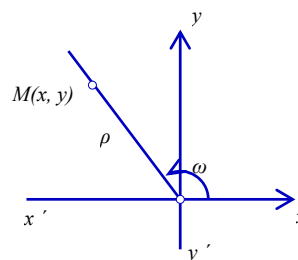
$$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \dots\dots\dots$$

Θέμα 2^ο

A. Στο διπλανό σχήμα δίνεται σημείο $M(x, y)$

τέτοιο ώστε να είναι $\widehat{xOM} = \hat{\omega}$ και $OM = \rho$.

Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου M και να γράψετε τη σχέση του ρ με τις συντεταγμένες του σημείου M .



B. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει η ισότητα:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x-3}{x+2} - \frac{2x^2-11x-10}{x^2-4} = \frac{x}{x-2}$

Άσκηση 2^η

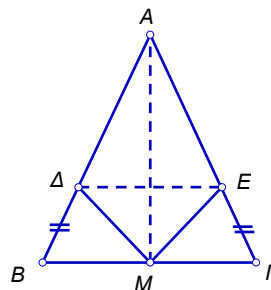
Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x-2}{4} - 1 = \frac{2(y+1)}{3} \\ 4x + y + 8 = 2(x-y) \end{cases}$$

Άσκηση 3^η

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ το σημείο M είναι μέσο της βάσης $B\Gamma$. Αν είναι $B\Delta = \Gamma E$, να αποδείξετε ότι:

A. το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές

B. τα τρίγωνα $A\Delta M$ και AEM είναι ίσα.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- B. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης με τα στοιχεία της 2^{ης}:

1 ^η Στήλη	2 ^η Στήλη
1. $(\alpha + \beta)^2$	A. $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
2. $(\alpha - \beta)^2$	B. $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
3. $(\alpha + \beta)^3$	Γ. $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
4. $\alpha^2 - \beta^2$	Δ. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
5. $(\alpha - \beta)^3$	E. $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

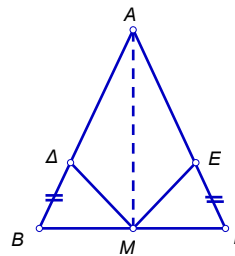
Θέμα 2^ο

- A. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή.
- B. Να γίνει σχήμα και να γραφτούν οι αντίστοιχες σχέσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος το σημείο M είναι μέσο της βάσης ΒΓ. Αν είναι ΒΔ = ΓΕ να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ.



Άσκηση 2^η

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{-(x+1)}{x^2-9}$$

Άσκηση 3^η

Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ \frac{3x}{4} - y = 14 \end{cases}$$

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

A. Τι είναι μονώνυμο, ποια τα μέρη του και πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια;

Να δώσετε παράδειγμα.

B. Να βρεθεί και να αποδειχθεί το ανάπτυγμα στις παρακάτω δύο ταυτότητες:

$$(α + β)^2 \text{ και } (α + β)^3$$

Θέμα 2^ο

Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνου καθώς και τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2(x-1) + 3y = -3 \\ 3x - 5(y-1) = -6 \end{cases}$$

Άσκηση 2^η

A. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $2x + 2$

β. $3x - 6$

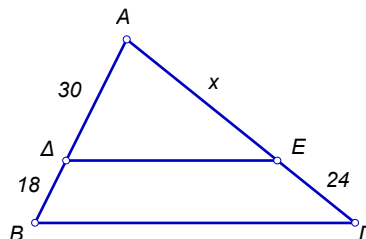
γ. $x^2 - x - 2$

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{4}{x^2 - x - 2} - \frac{x + 5}{2x + 2} = \frac{2x}{3x - 6}$$

Άσκηση 3^η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ παράλληλο στη ΒΓ. Αν είναι ΑΕ = x, ΑΔ = 30, ΔΒ = 18 και ΕΓ = 24 να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΕΓ.



ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να διατυπώσετε το νόμο των Ημιτόνων, Συνημιτόνων σε ένα τρίγωνο.
- B.** Σε τρίγωνο ΔΕΖ να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ με το νόμο των Συνημιτόνων και μετά να επιλύσετε τον παραπάνω τύπο ως προς το συνημίτονο της γωνίας Δ.

Θέμα 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$

- A.** Να γράψετε τους τύπους που μας δίνουν τη Διακρίνουσα και τις λύσεις της εξίσωσης.
- B.** Για τις διάφορες τιμές της Διακρίνουσας να διακρίνετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

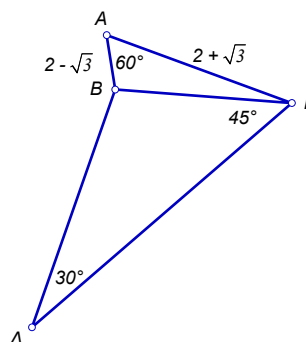
Άσκηση 1^η

Στο παρακάτω σχήμα είναι:

$AB = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $AG = \sqrt{3} + \sqrt{2}$,

$\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{\Delta} = 30^\circ$ και $\widehat{B\Gamma\Delta} = 45^\circ$.

- A.** Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 3$
- B.** Να υπολογίσετε τη ΒΔ.



Άσκηση 2^η

Δίνονται οι παραστάσεις:

$A = 4 - x^2$

$B = x^2 + 4x + 4$

$\Gamma = x^2 - x - 2$

- A.** Να παραγοντοποιηθούν οι παραπάνω παραστάσεις.

- B.** Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{\Gamma} = 0$

Άσκηση 3^η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας Α και από την κορυφή Β φέρνουμε τη ΒΚ κάθετο στη διχοτόμο ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε.

- A.** Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.
- B.** Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

