ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Πρέπει να γνωρίζουμε:

- Τον ορισμό γνησίως αύξουσας, γνησίως φθίνουσας , αύξουσας, φθίνουσας.
- Προσέξτε ιδιαίτερα : " για κάθε στα x_1 , x_2 "
- το «ομοιόστροφο ή μη των διαφορών καθώς και το πρόσημο του πηλίκου των διαφορών»
- πότε λέμε την συνάρτηση γνήσια μονότονη , πότε κατά διαστήματα γνησίως μονότονη και πώς αναγνωρίζεται η μονοτονία από την γραφική παράσταση της συνάρτησης
- ότι μια σταθερή συνάρτηση θεωρείται συγχρόνως αύξουσα και φθίνουσα
- ότι υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι μονότονες σε κάποιο υποδιάστημα του πεδίου ορισμού τους
- την μονοτονία όλων των βασικών συναρτήσεων
- την απόδειξη των προτάσεων για την μονοτονία της -f, f+g, fg, 1/f $\sqrt{f}$ (με τους περιορισμούς, όπου χρειάζονται)
- την απόδειξη των προτάσεων για την μονοτονία της σύνθεσης, fog, fof
- την απόδειξη του θεωρήματος για την 1-1 συνάρτηση. Ως παράδειγμα ότι δεν ισχύει το αντίστροφο θεωρήστε την f(x) = 1/x για κάθε x διάφορο του 0.
- την απόδειξη του θεωρήματος για την μονοτονία της αντίστροφης συνάρτησης.

Πως θα βρίσκουμε την μονοτονία μιας συνάρτησης ;

Ανάλογα με την μορφή που έχει ο τύπος της συνάρτησης ή η σχέση τιμών που επαληθεύει, με «σύνθεση ξεκινώντας από το $x_1 < x_2$ " , με "έστω $f(x_1) < f(x_2)$ και αποσύνθεση», με το πρόσημο του πηλίκου διαφορών, (σχεδιάστε το και παρατηρήστε τι εκφράζει) και κύρια προς το παρόν με συνδυασμό της μονοτονίας των βασικών συναρτήσεων και των πράξεων αυτών. (Άθροισμα, διαφορά, γινόμενο, σύνθεση..)

Πως μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την μονοτονία μιας συνάρτησης;

Αν γνωρίζουμε την μονοτονία της συνάρτησης f μπορούμε προς το παρόν , γιατί θα μάθουμε και άλλα στο εγγύς μέλλον, να κάνουμε σύγκριση τιμών της f, να λύνουμε ανισώσεις της μορφής $f[p(x)] < f[q(x)]$, να λύνουμε εξισώσεις της μορφής $f[p(x)] = f[q(x)]$, αφού είναι και 1-1, να αποδεικνύουμε ότι αντιστρέφεται και σε ποιο διάστημα, να αποδεικνύουμε την ύπαρξη μοναδικής ρίζας της εξίσωσης f(x) = 0 αφού διαπιστώσουμε με αντικατάσταση ότι υπάρχει μια.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1 -1

Πρέπει να γνωρίζουμε :

- Πότε ορίζουμε σαν 1-1 μια συνάρτηση
- Την αντιθετοαντίστροφη πρόταση που βολεύει περισσότερο για να δείξουμε ότι είναι 1-1 στις ασκήσεις. Προσοχή μη συγχέουμε αυτήν την πρόταση με τον ορισμό της συνάρτησης!
- Ότι για να δείξετε ότι δεν είναι 1-1 αρκεί να βρείτε δυο διαφορετικά χ που δίνουν την ίδια τιμή .
- Ότι κάθε ευθεία παράλληλη στον χ΄χ τέμνει την γραφική παράσταση μιας 1-1 συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο, δηλαδή η εξίσωση y = f(x), y ϵ R έχει το πολύ μια λύση.
- Ότι η εξίσωση y = f(x) με y να ανήκει στο σύνολο τιμών της f έχει ακριβώς μια λύση ως προς χ του πεδίου ορισμού της.
- Η σταθερή συνάρτηση δεν είναι 1-1
- Στα διαστήματα που η f είναι γνήσια μονότονη συνάρτηση είναι και 1-1.
- Η 1-1 συνάρτηση δεν είναι σίγουρα γνησίως μονότονη.
- Η άρτια συνάρτηση δεν είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της
- Η περιοδική συνάρτηση δεν είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της. (Η συνάρτηση με τύπο f(x) = ημx είναι περιοδική στο R αλλά αν την ορίσουμε πχ στο πρώτο τεταρτημόριο γίνεται μια απλή συνάρτηση, γνησίως αύξουσα άρα και 1-1)
- Το άθροισμα ή το γινόμενο δύο 1-1 συναρτήσεων δεν είναι σίγουρα 1-1 συνάρτηση.

Πως θα αποδεικνύουμε το 1-1 ;

- Ανάλογα με την μορφή που έχει ο τύπος της συνάρτησης ή η συναρτησιακή σχέση που επαληθεύει, με «σύνθεση ξεκινώντας από το $x_1 \neq x_2$ », με “έστω $f(x_1) = f(x_2)$ και αποσύνθεση“ , με την μονοτονία ή με ¨ η εξίσωση y = f(x) με y να ανήκει στο σύνολο τιμών της f έχει ακριβώς μια λύση ως προς χ του πεδίου ορισμού της¨.
- Στις συναρτησιακές συνήθως απομόνωσε τα f στο ένα μέλος.
- Στις δίκλαδες θα αποδεικνύεις το 1-1 κατά κλάδο και στην συνέχεια ότι τα σύνολα τιμών των κλάδων είναι ξένα μεταξύ τους.

Πως μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το 1-1 μιας συνάρτησης;

- Εξασφαλίζει την ύπαρξη της αντίστροφης συνάρτησης.
- Επιλύουμε εξισώσεις της μορφής $f[p(x)] = f[q(x)]$

Ποιες είναι γνωστές 1-1 συναρτήσεις;

- Όλες οι βασικές συναρτήσεις που είναι γνήσια μονότονες στο πεδίο ορισμού τους.
- Εκείνες οι βασικές συναρτήσεις που δεν είναι γνήσια μονότονες στο πεδίο ορισμού τους αλλά κατά διαστήματα είναι μονότονες (x^2 , x^2 -3x +4, ημx, συνx…) είναι και 1-1 στα διαστήματα που είναι γνήσια μονότονες.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πρέπει να γνωρίζουμε :

- Το 1-1 της συνάρτησης f εξασφαλίζει την ύπαρξη της αντίστροφης f^{-1}. Η εύρεση της όμως είναι πλήρης μόνο αν βρούμε τα σύνολα ορισμού και τιμών αυτής.
- Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f ορίζεται στο σύνολο τιμών της f και οι τιμές της είναι όλα τα στοιχεία του συνόλου ορισμού της f.
- Είναι $f(x) = y$ αν και μόνο αν $f^{-1}(y) = x$
- Είναι $f^{-1}(f(\mathbf{x})) = x$ και $f(f^{-1}(\mathbf{x})) = x$. Προσοχή πολύ για το σύνολο που ανήκει το **x.** Ανήκει στο σύνολο ορισμού της f και στο σύνολο ορισμού της f^{-1} αντίστοιχα, δηλαδή στην δεύτερη περίπτωση είναι **τιμή της f.**
- Αν το σημείο Μ (α , f(α)) ανήκει στην γραφική παράσταση της f τότε το σημείο Ν (f(α), α) ανήκει στην γραφική παράσταση της f^{-1}, συνεπώς η ευθεία $y = x$ είναι άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.
- Το εμβαδό που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της f , της f^{-1} και δυο κάθετων ευθειών στην $y = x$ είναι διπλάσιο από το εμβαδό που περιέχεται μεταξύ μιας από τις f ή f^{-1} και της ευθείας $y = x$
- Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν ΕΝΑ μόνο κοινό σημείο τότε αυτό ανήκει υποχρεωτικά στην $y = x$
- Αν η f είναι γνήσια αύξουσα τότε η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = x$ ή με την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.
- Μπορεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης να έχει κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της αντίστροφης της χωρίς όλα τα κοινά σημεία να ανήκουν στην $y = x$. (πχ, η $f(x) = -x^3$ και η αντίστροφη της)
- Τα κοινά σημεία, αν υπάρχουν, της f και της f^{-1} είναι συμμετρικά στην $y = x$
- Δεν είναι πάντα εύκολο να βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης γιατί η λύση ως προς x μπορεί να προκύπτει από εξίσωση που δεν λύνεται με αλγεβρικές μεθόδους, πχ δοκιμάστε να λύσετε ως προς x την $y = x^5 + x^3 + x + 2$.(γιατί άραγε την αντίστροφη της e^x την ονομάσαμε lnx ή την αντίστροφη της ημx όπου ορίζεται, την ονόμασαν τοξημx ;)
- Η αντίστροφη μιας συνάρτησης έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την συνάρτηση.
- Η αντίστροφη της αντίστροφης είναι η ίδια η συνάρτηση.
- Η άρτια η περιοδική και η σταθερή συνάρτηση δεν αντιστρέφονται στο σύνολο ορισμού τους.
- Αν οι συναρτήσεις f , g αντιστρέφονται και ορίζεται η fog τότε $(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$.
- Αν η f ταυτίζεται με την f^{-1}, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας την διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f: R_{+}^{*} \rightarrow R$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\frac{x}{e}) \leq lnx \leq f(x) - 1$ για κάθε x θετικό. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης.
2. Δίνεται η συνάρτηση f: R→ R για την οποία ισχύουν $f(x+y) = f(x) + f(y)$ και $f(x) \leq x$ για κάθε $x, y \in R$. Αποδείξτε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση και να βρείτε τον τύπο της f.
3. Δίνεται η f: R→ R για την οποία ισχύει: $2f(x+y) = 2f(x) + f(y) - 2xy - 1$ για κάθε $x, y \in R$. Να βρείτε το f(0) και τον τύπο της συνάρτησης.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f: R_{+}^{*} \rightarrow R_{+}^{*}$ για την οποία ισχύει $f(xy) = 2f(x)f(y) - xy$ για κάθε x, y θετικούς. Να βρείτε το f(1) και τον τύπο της συνάρτησης.
5. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο R με τιμές στο R ώστε να ισχύει : $(fog)(x) = x^2 - 3x + 4$ και $(gof)(2) = 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο Μ με τετμημένη $x_0 = 2$ που είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων της f και g.
6. Δίνεται η f: R→ R για την οποία ισχύει: f(f(x)) = 9x + 8 για κάθε x ϵ R. ι) Να δείξετε ότι f(9x+8) = 9f(x) + 8. ιι) να βρείτε το f(-1).
7. Δίνεται η f: R→ R για την οποία ισχύει (fof)(x) = 4 – x . Να βρείτε το f(2).
8. Δίνεται η συνάρτηση f: R→ R η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Να βρείτε τις τιμές του x ϵ R ώστε να ισχύει: $(fof)(x^2+4x) \leq (fof)(x + 4)$
9. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει γνήσια μονότονη συνάρτηση f: R→ R για την οποία ισχύει f(f(x)) + 3x = 0 για κάθε x ϵ R.
10. Δίνεται η f: R→ R για την οποία ισχύει: $f(x^2 – 2) + f (3x + 2) = 12$. Να δείξετε ότι δεν είναι 1-1.
11. Δίνεται η f: R→ R για την οποία ισχύει : $f(x) \geq \frac{f(0)+2f(1)}{3}$. Δείξτε ότι δεν είναι 1-1.
12. Δίνεται η f: R→ R για την οποία ισχύει: (fof)(x) = f(x) + x για κάθε x ϵ R. Να βρείτε το f(0) , να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να δείξετε ότι $f(x) - f^{-1}(x) = x$ με x ϵ f(R).
13. Δίνεται η f: R→ R για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) - e^x = 0$. Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
14. Δίνεται ότι η συνάρτηση f: R→ R είναι γνήσια μονότονη και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α (5 , 9) και Β (2 , 3). Αποδείξτε ότι είναι γνησίως αύξουσα, ότι αντιστρέφεται και λύστε την εξίσωση: $f(3 + f^{-1}(x^2 +2x)) = 9$.
15. Δίνεται η f: R^*→ R ώστε f(x) – f(y) = f (x/y). Αν η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα, να βρείτε την ρίζα αυτή, να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f (x^2 + 3) = f (x^2 + 1) + F (x + 1)$.
    Αν επιπλέον είναι f(x) > 0 για κάθε x > 1 να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.