Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

α) $x - 2 + 2yi = - 2i + 2 - yi$ β) $y + 2i = 3 - (2 + i)\, x$

γ) $4y - 3yi - 2x = 2 - 5xi + 9i$ δ) $(x^2 + 1)\, i + 2x = x^2 - 2xi - 3$

2. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x^2 - x - 9i$ και $w = 2 - y^2 i$, $x, y \in R$.

α) Να βρείτε τους x, y ώστε $z = w$.

β) Να βρείτε τον z.

3. ** Δίνεται ο μιγαδικός $z = 6i - (3 - 4i)\, x - 3yi - (3i - 2)\, x + (4 - 2yi)$, $x, y \in R$.

α) Να γράψετε τον z στη μορφή $α + βi$.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $Re\,(z) = 0$ ii) $Im\,(z) = 0$

iii) $Re\,(z) = Im\,(z)$ iv) $z = 0$

4. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = (2 + i)\, x + (y - 1)\, i - 5$, $x, y \in R$.

α) Να τον γράψετε στη μορφή $α + βi$.

β) Να γράψετε τον z συναρτήσει του x, αν $Im\,(z) = 0$.

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν $Re\,(z) = Im\,(z)$.

5. ** Δίνονται οι μιγαδικοί

$z_1 = 1 + i$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$, $z_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}i$,

$z_4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{27}i$, $z_5 = \frac{1}{16} + \frac{1}{54}i$, + …

Να βρείτε το άθροισμα των απείρων όρων $w = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + \dots$

6. ** Να γράψετε στη μορφή $α + βi$ τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $z_1 = \frac{5 - 2i}{1 - 2i}$ β) $z_2 = \frac{i - 1}{i} - \frac{2}{(1 - i)^2}$

7. ** Να γράψετε στη μορφή α + βi τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $3i\ (-\ 5i)$ β) $(2 + i)\ (-\ i + 3)$ γ) $\frac{3}{4i}$

δ) $\frac{1}{1 - i}$ ε) $\frac{1 - i}{-i + 1}$ ζ) $\frac{(2 + 3i)\ (-i + 1)}{1 - 2i}$

8. ** Να γράψετε στη μορφή α + βi τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $(2 - 3i)\ (4 - 5i) + 7i - 1$ β) $\frac{1 - 2i}{i + 3} \cdot \frac{2i + 1}{3i + 1}$ γ) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^2$

δ) $\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - 2i}$ ε) $(1 - i)^{-3}$

9. ** Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \frac{12 + 8i}{2 - 3i} + \frac{52 + 13i}{13i}$ να είναι ίσοι.

10. ** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε να ισχύει: $(\alpha + \beta i)^2 = \frac{12 + 5i}{i}$.

11. ** Να υπολογιστεί το $x \in R$ ώστε να ισχύει: $1 + 2\sqrt{2}\ i = 3\ \frac{1 + xi}{1 - xi}$.

12. ** Να βρεθούν τα $x, y \in R$ ώστε οι μιγαδικοί:
$z_1 = x + 2y - i$ και $z_2 = 11 - (4x - y)\ i$ να είναι συζυγείς.

13. ** Αν z φανταστικός αριθμός με $z \neq -\ i$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\omega = \frac{z^3 - i}{z + i}$ είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός.

14. ****** α) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$.

β) Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός που ικανοποιεί την ισότητα $\bar{z} = z^2$.

15. ****** Για τις διάφορες τιμές του $\nu \in N$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$f(\nu) = \dfrac{1 - i^{\nu+1}}{1 - i}$.

16. ****** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N$ ισχύει $(1 + i)^{20\nu} = (1 - i)^{20\nu}$.

17. ****** α) Να δείξετε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ίσος με το συζυγή του και αντιστρόφως.

β) Να δείξετε ότι αν $\omega = \dfrac{z}{z + i}$ και $\omega \in R$ τότε ο z είναι φανταστικός αριθμός.

18. ****** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in R$.

α) Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$ τον μιγαδικό $w = \dfrac{z + 8i}{z + 6}$.

β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν Im (w) = 0.

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν Re (w) = 0.

δ) Να δείξετε ότι η προηγούμενη σχέση (γ) είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του.

ε) Να δείξετε ότι ο προηγούμενος κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

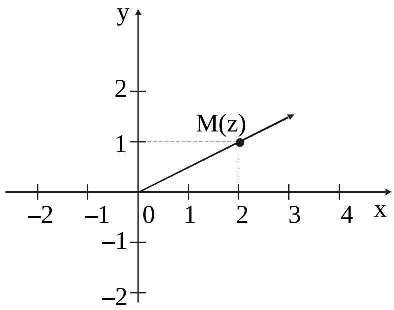
19. ****** Η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in R$ έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $2 - i$.

α) Να βρείτε την άλλη ρίζα. β) Να βρείτε τα α και β.

20. ****** Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$, $x, y \in R$, για τους οποίους ισχύει: $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.

21. ** Αν η εικόνα του μιγαδικού $z = \lambda + (\lambda - 1)\,i$ στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία $y = 4x + 1$, να βρεθεί ο $\lambda \in R$.

22. ** Να συμπληρώσετε το διπλανό σχήμα με το σημείο M_1 $(2z)$. Μετά να βρείτε τα σημεία M_2 $(2\bar{z})$, M_3 $(-2z)$ êáé M_4 $(-2\bar{z})$.
Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $M_1M_2M_3M_4$.



23. ** Ο μιγαδικός $z = 2 + i$ να αναλυθεί σε άθροισμα δύο μιγαδικών z_1, z_2 που οι εικόνες τους βρίσκονται αντίστοιχα στις ευθείες $y = x - 2$ και $y = 2x - 1$.

24. ** Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

α) $z = \dfrac{2+i}{1-3i}$ β) $z = \dfrac{(1-i)^2}{1+i} + 2 - 4i$

25. ** Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

α) $z = \left(\dfrac{2+i}{1-3i}\right)^2$ β) $z = \left(\dfrac{2+i\sqrt{5}}{3}\right)^{\nu}$, $\nu \in N$.

26. ** Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z που ικανοποιεί την ισότητα $|z| + z = 2 + i$.

27. ** Αν $z \in C$ και $|z+9| = 3\,|z+1|$, αποδείξτε ότι $|z| = 3$.

28. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός ω.

α) Να δειχθεί ότι αν ω φανταστικός αριθμός, τότε $\omega = -\overline{\omega}$ και αντιστρόφως.

β) Με βάση το προηγούμενο ή με άλλο τρόπο δείξτε ότι αν ο αριθμός $\omega = \frac{z-1}{z+1}$, $z \neq -1$, είναι φανταστικός, τότε $|z| = 1$.

29. ** Να γράψετε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z αν ξέρουμε ότι η απόλυτη τιμή του πραγματικού μέρους του z είναι 3 και η απόλυτη τιμή του φανταστικού μέρους του z είναι 4. Πού βρίσκονται οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των παραπάνω μιγαδικών αριθμών;

30. ** Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|$.

31. ** Να λυθεί στο C η εξίσωση: $z + |z+1| + i = 0$.

32. ** Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $|1-z| > |z|$, δείξτε ότι $\mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}$.

33. ** Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν τη σχέση $2|z-1| = |z-4|$ βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Ο (0, 0) και ακτίνας 2.

34. ** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο αν ο αριθμός $\frac{z+2i}{z+1}$ είναι πραγματικός.

35. ** Ο μιγαδικός αριθμός z ικανοποιεί τις σχέσεις:

$-2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 2$ (1)

$|\mathrm{Im}(z)| \leq 2$ (2)

$|z| \geq 2$ (3)

Να γραμμοσκιάσετε στο μιγαδικό επίπεδο το χωρίο που αντιπροσωπεύει το σύνολο των εικόνων του z και να βρείτε το εμβαδόν του.

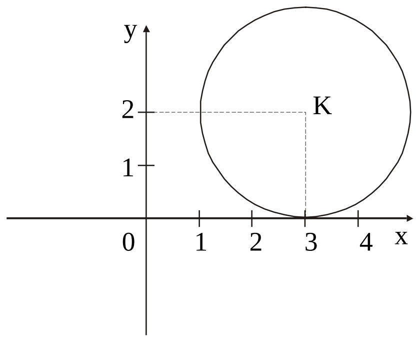
36. ****** Να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει:

α) $|z+1-i| = 3$

β) $|z-1-i| < 4$

γ) $1 < |z-1+i| < 2$

37. ****** Ο κύκλος του διπλανού σχήματος εφάπτεται του άξονα των τετμημένων και είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$, $x, y \in R$ στο μιγαδικό επίπεδο.



α) Από τις παρακάτω εξισώσεις, να επιλέξετε δύο που τον αντιπροσωπεύουν:

i) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

ii) $3x^2 + 2y^2 = 4$

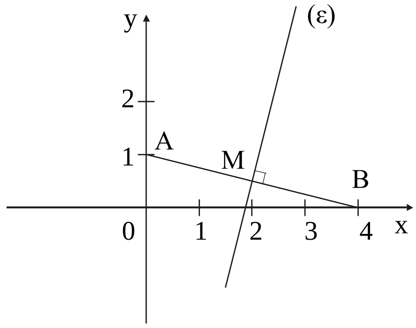
iii) $|z| - |3+2i| = 4$

iv) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

v) $|z-3-2i| = 2$

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

38. ** Στο διπλανό σχήμα η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$, $x, y \in R$ στο μιγαδικό επίπεδο.



α) Από τις παρακάτω εξισώσεις, να επιλέξετε τρεις που τον αντιπροσωπεύουν:

i) $x^2 - i = y^2 + 4$

ii) $|z - i| = |z - 4|$

iii) $|z - 1| - |z - 4| = 0$

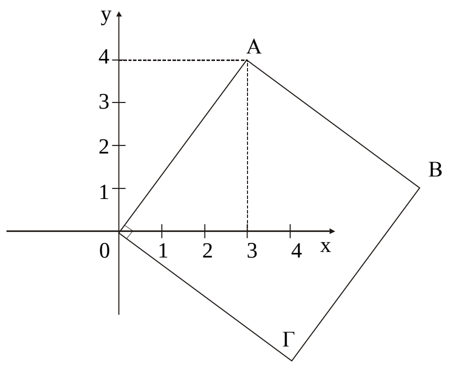
iv) $y = 4x - \dfrac{15}{2}$

v) Re (z) = 2Im (z)

vi) 8Re (z) = 15 + 2Im (z)

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

39. ** Στο διπλανό σχήμα το ΟΑΒΓ είναι τετράγωνο. Αν Α, Β και Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = x + yi$ και $z_3 = κ + λi$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο:



α) Να δειχθεί ότι $3κ + 4λ = 0$.

β) Να βρεθούν οι z_2 και z_3.

40. ** Στο μιγαδικό επίπεδο έστω $\overrightarrow{OA}$ η διανυσματική ακτίνα ενός μιγαδικού z_1 και $\overrightarrow{OB}$ η διανυσματική ακτίνα του $z_2 = z_1 \cdot w$, όπου $w = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

β) Να δείξετε ότι $w^3 = -1$.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.

δ) Να δείξετε ότι $z_2^3 = - z_1^3$ και $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$.

41. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$z_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$ $\quad$ $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $\quad$ $z_3 = - \frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{3}} i$

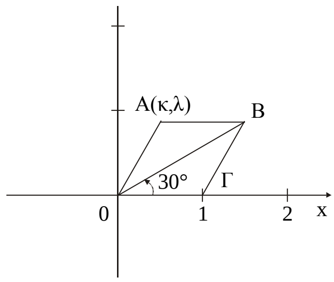
$z_4 = 5 - 5\sqrt{3}\, i$ $\quad$ $z_5 = 3 - 3\sqrt{3}\, i$

α) Να γράψετε τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς στη μορφή $\kappa (1 - \sqrt{3}\, i)$, $\kappa \in R$ και να τους τοποθετήσετε σε μια σειρά, ώστε να προηγείται αυτός που έχει το μικρότερο μέτρο.

β) Πού βρίσκονται οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο;

γ) Να βρείτε τον μιγαδικό z έτσι ώστε η εικόνα του $z \cdot z_2$ να συμπίπτει με την εικόνα του z_3.

42. ** Στο διπλανό σχήμα το ΟΑΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. Αν $z = \kappa + \lambda i$ να δειχθεί ότι: $\lambda\sqrt{3} = \kappa + 1$.



43. ** α) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0$.

γ) Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία που είναι εικόνες των ριζών.

δ) Τι είδους τρίγωνο σχηματίζουν οι εικόνες των ριζών; Να βρείτε το εμβαδόν του.

44. ** Δίνεται η εξίσωση $z^3 + 3z^2 + 3z - 7 = 0$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

45. ** Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2z\,ημ\,\frac{β}{2}\,συν\,\frac{β}{2} + ημ^2\,\frac{β}{2} = 0$, όπου β πραγματική παράμετρος με $β \in [0, 2π]$.

Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι

$$ημ\,\frac{β}{2}\,συν\,\frac{β}{2} \pm i\,ημ^2\,\frac{β}{2}.$$

46. ** Δίνεται η εξίσωση $z^2 + βz + γ = 0$, $z \in C$, με ρίζες τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2. Να αποδείξετε ότι:

α) οι αριθμοί β και γ είναι πραγματικοί

β) η εξίσωση $z^2 + βz - γ = 0$ έχει ρίζες πραγματικές.

47. ** Δίνεται η εξίσωση $|z - 1| = |z - 3i|$, $z \in C$.

α) Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με άκρα Α (1, 0) και Β (0, 3).

β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση της (ε) είναι $x - 3y + 4 = 0$.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της (ε).

δ) Να βρεθεί η εικόνα του z για τον οποίο το $|z|$ είναι ελάχιστο.

48. ** Αν z μιγαδικός και $f(ν) = i^ν z$, $ν \in N^*$ τότε:

α) Να δειχθεί ότι $f(4λ) + f(4λ + 1) + f(4λ + 2) + f(4λ + 3) = 0$, $λ \in N^*$.

49. ** Αν z μιγαδικός αριθμός με $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$, τότε:

α) Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $|z - 2| = 2$.

β) Να δειχθεί ότι αν για τον z ισχύει $\mathrm{Im}(z) = 1$, τότε $\mathrm{Re}(z) = 2 + \sqrt{3}$ ή $\mathrm{Re}(z) = 2 - \sqrt{3}$.