

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A1) Έστω το διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$. Να ορίσετε τις έννοιες
α) μέτρο του διανύσματος και β) συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος
- A2) Να γράψετε τους τύπους που δίνουν
α) την απόσταση σημείου $M(x_0, y_0)$ από την ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$
β) το εμβαδόν (ΑΒΓ) ενός τριγώνου με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ.
- A3) Τι είναι παραβολή με εστία Ε και διευθετούσα δ;
- A4) Τι είναι έλλειψη με εστίες Ε και Ε' ;
- A5) Τι είναι υπερβολή με εστίες Ε και Ε' ;
- A6) Πώς διαβάζεται και τι σημαίνει η σχέση $\beta \perp \alpha$;
- A7) Ποιες ελλείψεις λέγονται όμοιες ;
- B1) Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Να αποδείξετε ότι:
Α) $\vec{a} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ και Β) $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1)$
- B2) Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{\beta}) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{\beta})$
- B3) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι :
 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$
- B4) Αν α, β, γ ακέραιοι να αποδείξετε ότι :
Α) αν α / β και β / γ τότε και α / γ και Β) αν α / β και α / γ τότε και $\alpha / (\beta + \gamma)$
- Γ1) Ποια η εκκεντρότητα και ποιες οι ασύμπτωτες μιας ισοσκελούς υπερβολής ;
- Γ2) Είναι δυνατόν μια έλλειψη και μια υπερβολή να έχουν ίδια εκκεντρότητα ;
(Εξηγήστε)
- Γ3) Τι συμπεραίνεται για τα μη μηδενικά διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ αν
α) $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ και β) $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$; (Εξηγήστε)

ΘΕΜΑ 2^ο

1. Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = (3\kappa, 4)$ και $\vec{\beta} = (2, 5)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.
- α) Ποιο το κ ώστε $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$;
- β) Ποιο το κ ώστε $\vec{a} \perp \vec{\beta}$;
- γ) Αν το κ είναι ακέραιος να βρεθεί το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ με το 3.
2. Έστω τα σημεία $A(2, 3)$, $B(1, 5)$ και $\Gamma(2\alpha, \alpha + 3)$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.
- α) Ποια η απόσταση των σημείων A και B ;
- β) Ποια η εξίσωση της ευθείας AB ;
- γ) Να αποδείξετε ότι το Γ κινείται σε ευθεία η οποία να βρεθεί
- δ) Ποιες οι δυνατές **ακέραιες** τιμές του α ώστε το εμβαδόν (AB Γ) να είναι ακέραιος αριθμός ;
3. Έστω ο ακέραιος $\alpha = 28\kappa + 11$ ώστε ο κ^2 να είναι περιττός .
- α) Να αποδείξετε ότι ο κ είναι περιττός
- β) Να αποδείξετε ότι ο α είναι και αυτός περιττός
- γ) Ποιο το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με το 7 .
4. Έστω η παραβολή $y^2 = 8x$
- α) Ποια η εστία και ποια η διευθετούσα της
- β) Ποια η εξίσωση εφαπτομένης της στο σημείο $M(2, -4)$
- γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο της $P(x, y)$ με τετμημένη ακέραιο πρέπει και η τεταγμένη να είναι άρτιος ακέραιος .
6. Α. Ποια η εξίσωση ευθείας η οποία περνάει από το μέσο M του τμήματος AB με $A(3, -8)$ και $B(5, 2)$ και από το κέντρο K του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 20 = 0$;
- Β. Ποιο το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ όπου :

Δ είναι το σημείο τομής των ευθειών $x + 2y = 5$ και $3x - 4y = 5$

E είναι η εστία της παραβολής $y^2 = -12x$ και

Z είναι η αρχή του διανύσματος $\vec{ZP} = (7, -3)$ όπου $P(8, 2)$ το πέρας του διανύσματος.

6. Α. Έστω $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και η γωνία τους $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

Να βρεθεί το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και το $|\vec{a} + \vec{\beta}|$

Β. Να βρεθεί διάνυσμα \vec{x} ώστε $\vec{x} \parallel (\vec{a} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{a} + \vec{x})$

ΘΕΜΑ 3^ο

1. Έστω η εξίσωση $C : (x - 3y)^2 + (3x + y)^2 = 40$

α) Να αποδείξετε ότι η C παριστάνει κύκλο και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του

β) Ποια η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου αυτού στο σημείο του $M(\sqrt{3}, 1)$

γ) Να εξηγήσετε γιατί **δεν** υπάρχει σημείο του $P(\alpha, \beta)$ ώστε **α** περιττός και συγχρόνως **β** άρτιος.

2. Έστω η εξίσωση $C : x^2 - 6ax + y^2 + 2ay - 2005 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η C παριστάνει πάντα κύκλο και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του ρ .

β) Αν $K(x_0, y_0)$ είναι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων να αποδείξετε ότι ανήκουν σε ευθεία

που περνάει από την αρχή των αξόνων.

γ) Αν $\alpha \nearrow$ να αποδείξετε ότι $\rho^2 = \text{πολ}5$

3. Έστω τα σημεία $A(4, 0)$, $B(8, 3)$ και $\Gamma(5, 7)$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και να βρεθεί το εμβαδόν του.

β) Ποια η εξίσωση της διαμέσου AM του τριγώνου $AB\Gamma$;

γ) Που κινούνται τα σημεία $M(x, y)$ αν ισχύει :

$$\overline{AB}^2 + 2 \cdot \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 2 \cdot \overline{MI}^2 ;$$

4. Έστω η εξίσωση $C : x^2 + 9y^2 = 9$

α) Να αποδείξετε ότι η C παριστάνει έλλειψη και να βρείτε εστίες, κορυφές και εκκεντρότητα

β) Ποια η εξίσωση εφαπτομένης της C στο σημείο της $P(-2\sqrt{2}, \frac{1}{3})$;

γ) Να βρεθεί σημείο $M(x, y)$ της έλλειψης ώστε $\overline{OM} \perp \overline{MA}$ όπου O η αρχή αξόνων .

5. Α. Να βρεθεί η μορφή του $a \in \mathbb{Z}$ ώστε ο αριθμός $M = \frac{a^2 + 6a - 7}{4} \in \mathbb{Z}$.

Β. Αν το υπόλοιπο της της ευκλείδειας διαίρεσης του a με το 3 είναι 2

να αποδείξετε ότι ο αριθμός $P = (a^2 - 2a + 2004)$ είναι πολλαπλάσιο του 3 .

6. Έστω η εξίσωση (E) : $(2\lambda - 1)x + (3\lambda + 4)y - 8\lambda - 7 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η (E) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ και περνάει από σταθερό

σημείο το οποίο να βρεθεί .

β) Ποιο το λ αν η παραπάνω ευθεία εφάπτεται στον κύκλο με κέντρο την αρχή αξόνων και ακτίνα

$\rho=1$; (τριγωνομετρικός κύκλος)

ΘΕΜΑ 4^ο

1. Έστω τα σημεία $A(1, 2)$, $B(2, 5)$ και $M(x, y)$ ώστε $\overline{AM}^2 + 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AB} - 15 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι το M κινείται σε κύκλο και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του ρ .

β) Ποια η εξίσωση της ευθείας AB ;

γ) Ποια η σχετική θέση της ευθείας ε με εξίσωση $4x - 3y + 12 = 0$ με τον κύκλο αυτό .

2. Έστω η υπερβολή $C : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

α) Ποιες οι εστίες , η εκκεντρότητα και οι ασύμπτωτες της .

β) Να βρεθεί το γινόμενο των αποστάσεων ενός τυχαίου σημείου της $M(x_0, y_0)$ από τις ασύμπτωτες της .

γ) Αν $P(\mu, \nu)$ σημείο της υπερβολής με τεταγμένη άρτιο ακέραιο να αποδείξετε ότι $\mu^2 = \text{πολ}3$

3. Έστω τα σημεία $M(8\alpha + 16, \alpha^2 + 4\alpha + 4)$ με $\alpha \nearrow$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται σε μια παραβολή και να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της .

β) Είναι δυνατόν το τυχαίο σημείο M της παραπάνω παραβολής να έχει τετμημένη περιττό ακέραιο και συγχρόνως και τεταγμένη ακέραιο ;

4. Έστω τα σημεία $B(4, 2)$ και $\Gamma(6, 2)$

α) Ποια η εξίσωση της μεσοκαθέτου (ϵ) του τμήματος $B\Gamma$

β) Αν A το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας xOy των αξόνων ($1^{ης}$ - $3^{ης}$ γωνίας) και της (ϵ)

να βρεθεί το μήκος του ύψους $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$

γ) Ποια η εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$ και ποιο το μήκος του ύψους BE του τριγώνου $AB\Gamma$.

δ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου M της πλευράς $B\Gamma$ από τις πλευρές AB και $A\Gamma$ είναι σταθερό .

5. Έστω η εξίσωση (E) : $(\lambda^2 + \lambda - 2)\chi + (\lambda^2 + 2\lambda)\psi + (\lambda^2 - 3\lambda - 10) = 0$

i. Πότε παριστάνει ευθεία;

ii. Πότε είναι παράλληλη στον άξονα $\chi\chi$;

iii. Πότε είναι παράλληλη στον άξονα $\psi\psi$;

iv. Πότε περνάει από αρχή αξόνων ;

v. Είναι δυνατόν να σχηματίζει γωνία 135° με τον $\chi\chi$;

- vi. Να δείξετε ότι όλες οι παραπάνω ευθείες περνούν από σταθερό σημείο δηλαδή αποτελούν δέσμη ευθειών.

6. Έστω $A(\lambda, \lambda+1)$, $B(\lambda+6, 2\lambda+1)$, $\Gamma(\lambda+3, \lambda)$

- Πότε τα A, B, Γ είναι συνευθειακά ;
- Αν ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$ ποιο το λ ώστε $(AB\Gamma)=12$ τ.μ ;
- Ποιο το λ ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο στο A ;

7. Έστω $A(3, 5)$, $B(5, -9)$, $\Gamma(-3, 7)$

- Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών, διαμέσων, μεσοκαθέτων και υψών του καθώς και οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου, περίκεντρου και ορθόκεντρου του
- Ποια τα μήκη πλευρών, διαμέσων και υψών
- Ποιο το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
- Ποια η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$

8. Έστω $A(-1, 2)$, $B(\mu, \mu+3)$, $\Gamma(\kappa, 2\kappa)$, $\Delta(\lambda, \lambda-1)$

- Δείξτε ότι τα σημεία B και Δ κινούνται σε δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 με $A \in \epsilon_1$ και να βρεθεί το κ αν είναι γνωστό ότι $\Gamma \in \epsilon_2$
- Ποια η συνθήκη ώστε $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο;
- Είναι δυνατόν να είναι ρόμβος, ορθογώνιο ή τετράγωνο;
- Τι θα πρέπει να ισχύει ώστε να είναι τραπέζιο και τι για ισοσκελές τραπέζιο;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Έστω $A(4, 0)$, $B(8, 3)$, $\Gamma(5, 7)$.

- a) Να δειχθεί ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

- b) Ποιο το σύνολο των σημείων $M(\chi, \psi)$ ώστε $\overline{AB}^2 + 2 \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 2 \overline{MG}^2$

2) Έστω $A(1, 3)$, $B(\mu, 2\mu+1)$, $\Gamma(2, -1)$ και $\Delta(\lambda, 2\lambda-5)$

- a) Να δειχθεί ότι τα B και Δ κινούνται σε παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 με A στην ε_1 και B στην ε_2
- b) Ποια η συνθήκη ώστε ABΓΔ παραλληλόγραμμο, ρόμβος, ορθογώνιο, τετράγωνο, τραπέζιο και ισοσκελές τραπέζιο.
- 3) Σε τρίγωνο ABΓ η πλευρά AB έχει εξίσωση $2\chi-\psi=1$, ενώ η ΒΓ έχει εξίσωση $\chi-2\psi+1=0$. Αν η ΑΓ είναι παράλληλη στην ευθεία $2\chi+11\psi+2004=0$ και $A(2,3)$ τότε
 α) ποια η εξίσωση της ΑΓ β) ποια τα Β και Γ γ) ν.δ.ο. ABΓ ισοσκελές τρίγωνο
 δ) να βρεθούν οι εξισώσεις των μ_γ και ν_α
- 4) Σε τρίγωνο ABΓ είναι $A(2,1)$ και δύο ύψη του έχουν εξισώσεις $3\chi+\psi-11=0$ και $\chi-\psi+3=0$. α) ποιο το ορθόκεντρο Η β) ποιες οι κορυφές Β και Γ
 γ) ποιες οι εξισώσεις των πλευρών του δ) ποιο το εμβαδόν του
- 5) Έστω η εξίσωση E: $(2\lambda+1)\chi-(2+\lambda)\psi+1-\lambda=0$
 α) ν.δ.ο παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ β) ν.δ.ο διέρχεται από σταθερό σημείο
 γ) να βρεθεί η απόσταση του σημείου $A(3,9)$ από την E για $\lambda=1$
 δ) ποιο το λ ώστε η απόσταση του $B(2,1)$ από την E να είναι 1
- 6) α) Δείξτε ότι η εξίσωση $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi-3\chi-3\psi+2=0$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες β) Ποια η μεταξύ τους απόσταση; γ) ποιο το εμβαδόν του τραπέζιου που σχηματίζουν αυτές με τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$;
- 7) Έστω η εξίσωση E: $(\mu^2-\mu)\chi+(\mu^2-1)\psi+(\mu+3)=0$
 α) πότε είναι ευθεία ; β) πότε είναι παράλληλη στον $\chi'\chi$ γ) πότε είναι παράλληλη στον $\psi'\psi$; δ) πότε περνάει από την αρχή των αξόνων ;
- 8) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: 3\chi-4\psi+2003=0$ και η απόσταση του σημείου $P(2,-1)$ από την ε να είναι 3
 (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Ορίζω $\varepsilon: \psi=\lambda\chi+\beta$, βρίσκω λ , παίρνω τύπο $d(P,\varepsilon)=\dots$ κ.τ.λ.)
- 9) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε η οποία περνάει από το $M(0,1)$ και απέχει από το $P(2,0)$ απόσταση 2.
 (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Ορίζω $\varepsilon: \psi=\lambda\chi+\beta$, βρίσκω β σε σχέση με το λ , παίρνω τύπο $d(P,\varepsilon)=\dots$ κ.τ.λ.)
- 10) Έστω $\varepsilon: \chi-\psi+1=0$ α) ποιες οι συμμετρικές της ε ως προς $\chi'\chi$, $\psi'\psi$, αρχή αξόνων
 β) ποια η συμμετρική της ε ως προς το σημείο $K(1,3)$

γ) ποια η συμμετρική της ε ως προς την ευθεία ζ: $2\chi + 5\psi + 3 = 0$