

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Για τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  δίνεται ότι  $|\vec{a}|=1, |\vec{\beta}|=2$  και  $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$ . Έστω τα διανύσματα

$\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$ . Να υπολογίσετε:

- i. Το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$  Μονάδες 5
- ii. Το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  Μονάδες 15
- iii. Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$ . Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις,  $\varepsilon_1: x + 2y + 1 = 0$  και  $\varepsilon_2: x - y - 2 = 0$ .

- i) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ . Μονάδες 8
- ii) Να βρεθούν τα σημεία της  $\varepsilon_2$  που απέχουν από την  $\varepsilon_1$  απόσταση  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ . Μονάδες 9
- iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που είναι κάθετη στην  $\varepsilon_1$  στο σημείο M και τέμνει την  $\varepsilon_2$  στο σημείο N έτσι ώστε  $(MN) = \sqrt{5}$ . Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι κύκλοι  $C_1: x^2 + (y - 2)^2 = 4$  και  $C_2: x^2 + y^2 - 2y = 0$ .

- i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά Μονάδες 7
- ii. Αν η ευθεία  $\varepsilon: y = ax$  σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{\pi}{3}$ , να βρείτε τα σημεία τομής A και B διαφορετικά του σημείου  $O(0, 0)$ , των κύκλων  $C_1, C_2$  και της ευθείας  $\varepsilon$ . Μονάδες 10
- iii. Αν  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  οι ευθείες των εφαπτομένων των δύο κύκλων στα σημεία A και B να αποδείξετε ότι  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ . Μονάδες 8

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 12<sup>ο</sup>

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$

έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .

**Μονάδες 10**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. **Μονάδες 10**

*i.* Αν  $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a}$  και  $\vec{a} \neq \vec{0}$  τότε  $\lambda = \mu$

*ii.* Για το εσωτερικό γινόμενο των  $\vec{a} \neq \vec{0}$  και  $\vec{v}$  ισχύει:  $\vec{a} \cdot \vec{v} = |\vec{a}| \cdot \text{πρoβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ .

*iii.* Το διάνυσμα  $\vec{\eta} = (-B, A)$  είναι κάθετο στην ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$ .

*iv.* Αν  $\alpha = \beta$  τότε η υπερβολή  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  λέγεται ισοσκελής.

*v.* Η γωνία  $\varphi$  που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{a}$  με τον άξονα  $x'x$  παίρνει τιμές  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

**Γ.** Τι ονομάζεται παραβολή με εστία  $E$  και διευθετούσα  $\delta$ . Ποια είναι η εξίσωσή της όταν η  $E$  βρίσκεται στον άξονα  $x'x$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία  $A(-1, -1)$ ,  $B(1, 3)$  το διάνυσμα  $\vec{AK} = (-\kappa, -2)$  και η γωνία

$\left( \widehat{\vec{AM}, \vec{AP}} \right) = 60^\circ$ .

*i.* Αν  $M$  το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{AM}$ .

**Μονάδες 8**

*ii.* Να υπολογίσετε το γινόμενο  $\kappa = \vec{AM} \cdot \vec{AP}$  αν  $|\vec{AP}| = \frac{4}{\sqrt{5}}$  και  $\vec{AM} = (1, 2)$

**Μονάδες 7**

- iii.* Για  $\kappa=2$  να εξετάσετε αν τα διανύσματα  $\overrightarrow{AM}$  και  $\overrightarrow{AK}$  είναι συγγραμμικά και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AMK$  **Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + \lambda(x-1) = 0$ , (1) .

- i.* Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα . **Μονάδες 13**
- ii.* Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε ο κύκλος (1) να εφάπτεται στην ευθεία  $\varepsilon: 4x+3y-2=0$  **Μονάδες 12**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $(2x+y+1)+\lambda(x+y-5)=0$   $\lambda \in \mathbb{R}$  (1) .

- A.** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή . **Μονάδες 5**
- B.** Αν  $\varepsilon$  η ευθεία  $4x+3y-12=0$  και  $\eta$  η ευθεία που προκύπτει από την (1) για  $\lambda=2$  να βρείτε :
- i.* Την απόσταση των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\eta$  . **Μονάδες 5**
- ii.* Τη μεσοπαράλληλη των ευθειών  $\varepsilon$  και  $\eta$  . **Μονάδες 7**
- Γ.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την (1) και σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο . **Μονάδες 8**

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 12<sup>ο</sup>

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup> :

A) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη “**Σωστό**” αν η πρόταση είναι **σωστή** και “**Λάθος**” αν η πρόταση είναι **λάθος** , δίπλα στο **γράμμα** που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η εξίσωση  $x \cdot y = x$  παριστάνει μία μόνο ευθεία του επιπέδου.

β. Η εξίσωση  $y = |x|$  παριστάνει μία μόνο ημιευθεία.

γ. Τα σημεία  $(-2,2)$  και  $(4,2)$  του κύκλου  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$  είναι αντιδιαμετρικά.

δ. Οι κύκλοι  $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$  και  $x^2 + y^2 + 2x + 3y + \sqrt{2} = 0$  είναι ομόκεντροι.

ε. Μία παραβολή με άξονα συμμετρίας τον  $y'y$  έχει πάντα εξίσωση της μορφής  $x^2 = 2py$ .

ζ . Η διευθετούσα της  $x^2 = 4y$  είναι η  $y = -1$  .

η. Η εξίσωση  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  παριστάνει έλλειψη μόνο αν  $a > \beta$ .

θ. Οι ελλείψεις  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  και  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$  είναι όμοιες.

ι . Αν  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  μη μηδενικά τότε  $\frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}|^2} = \vec{\beta}$

κ . Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  αν  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$  τότε  $\vec{\alpha} = 0$  ή  $\vec{\beta} = 0$ . (10X2=20 μονάδες)

B) Να αποδείξετε ότι: Αν  $a, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$  με  $a \neq 0$  ,  $a/\beta$  και  $a/\gamma$  τότε  $a/\beta + \gamma$ . (5 μονάδες)

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνονται οι γραμμές  $\varepsilon_1 : \lambda x + \lambda y = 2$  και  $\varepsilon_2 : x - y = 2\lambda$  ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α. Να βρεθούν οι τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε  $\varepsilon_1$  να παριστάνει ευθεία. (5 μονάδες)

β. Για τις παραπάνω τιμές του  $\lambda$  να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών ανήκει σε μια ισοσκελή υπερβολή C . (10 μονάδες)

γ. Να υπολογίσετε τις εστίες E', E της υπερβολής C . (10 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup> :**

Δίνεται ο κύκλος  $C_1 : (x-a)^2 + y^2 = 4a^2$  και η παραβολή  $C_2 : y^2 = 4ax$ , όπου  $a > 0$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος  $C_1$  έχει κέντρο την εστία της παραβολής  $C_2$  και εφάπτεται στη διευθετούσα της. (10 μονάδες)

**β.** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος  $C_1$  και η παραβολή  $C_2$  τέμνονται στα σημεία  $A(a, 2a)$  και  $B(a, -2a)$ . (5 μονάδες)

**γ.** Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής  $C_2$  στα  $A, B$  είναι κάθετες και τέμνονται πάνω στη διευθετούσα. (10 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup> :**

Δίνονται οι ευθείες :  $\varepsilon_1 : \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}x + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}y + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$  και

$\varepsilon_2 : \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}x + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}y + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = 0$  όπου  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  είναι διανύσματα μη μηδενικά

και ανά δύο μη συγγραμμικά .

**α.** Να αποδείξετε ότι  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$  (8 μονάδες)

**β.** Να υπολογίσετε την απόσταση των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  . (9 μονάδες)

**γ.** Αν τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  είναι μοναδιαία να εξετάσετε αν μπορεί η απόσταση των δύο ευθειών να είναι ίση με  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  . (8 μονάδες)

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 13<sup>ο</sup>****Θ Ε Μ Α 1<sup>ο</sup>**

**A.** Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  ακέραιοι. Αν  $\alpha/\beta$  και  $\alpha/\gamma$  να αποδείξετε ότι  $\alpha/\beta + \gamma$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 12)

**B.** Έστω δύο σημεία  $E$  και  $E'$  ενός επιπέδου. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία  $E$  και  $E'$  στο συγκεκριμένο επίπεδο. (ΜΟΝΑΔΕΣ 3)

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  είναι οι ευθείες  $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$  και  $y = \frac{\alpha}{\beta}x$

β) Αν  $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$  τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$  και αντιστρόφως

γ) Η εξίσωση της ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  που διέρχεται από το σημείο  $A(x_1, y_1)$  είναι η  $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$

δ) Η εφαπτομένη της παραβολής  $y^2 = 2px$  στο σημείο της  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $yy_1 = p(x + x_1)$

ε) Ο συντελεστής ευθείας παράλληλης με τον άξονα  $\psi' \psi$  δεν ορίζεται.

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

### Θ Ε Μ Α 2°

Δίνεται ο ακέραιος αριθμός  $a=3k+2$ , όπου  $k \in \mathbb{Z}$ .

α) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $a^2$  με το **3** είναι **1**. (ΜΟΝΑΔΕΣ 9)β)

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\frac{a^2 + a}{3}$  είναι ακέραιος. (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

γ) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $a^3$  με το **3**. (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

### Θ Ε Μ Α 3°

Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δίνεται ότι  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 1$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = 120^\circ$ . Δίνονται επίσης τα διανύσματα  $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ ,  $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ . Να υπολογίσετε :

α) Τα εσωτερικά γινόμενα  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  και  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 9)

β) Τα μέτρα  $|\vec{u}|, |\vec{v}|$  των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

γ) Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

### Θ Ε Μ Α 4°

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2x\eta\mu\theta - 2y\sigma\upsilon\nu\theta - 3 = 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  (1)

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο  $C$  για κάθε  $\theta \in \mathbb{R}$  του οποίου να βρείτε το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $\rho$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 9)

β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1) ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων του οποίου να βρείτε την ακτίνα. (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon: x\eta\mu\theta + y\sigma\nu\theta - 3 = 0$  είναι εφαπτομένη του κύκλου C για κάθε  $\theta \in R$  (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

### ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 14<sup>ο</sup>

#### Θ Ε Μ Α 1<sup>ο</sup>

Α. Έστω  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και  $(x, y)$  οι συντεταγμένες του μέσου M, του AB. Να αποδείξετε ότι:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ και } y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (\text{ΜΟΝΑΔΕΣ 12})$$

Β. Πότε δύο μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  ονομάζονται συγγραμμικά ή παράλληλα; (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  ακέραιοι ισχύει: αν  $\alpha/\beta$  και  $\alpha/\gamma$  τότε  $\alpha/\beta + \gamma$

β) Αν  $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$  τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$  και αντιστρόφως

γ) Η εξίσωση της ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  που διέρχεται από το σημείο  $A(x_1, y_1)$  είναι η  $x - x_1 = \lambda(y - y_1)$

δ) Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες  $E'(-\gamma, 0)$ ,  $E(\gamma, 0)$  και σταθερή διαφορά  $2a$  είναι

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1, \quad (\text{ΜΟΝΑΔΕΣ 8})$$

#### Θ Ε Μ Α 2<sup>ο</sup>

Δίνονται τα σημεία A και B με συντεταγμένες  $A(3, -5)$  και  $B(-1, -3)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος  $\overline{AB}$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το μέσο του AB και είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση  $3x - 6y + 5 = 0$  (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το τμήμα AB. (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

δ) Αν  $\vec{u} = (3, 6)$  να δείξετε ότι  $\vec{u} \perp \overline{AB}$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

**Θ Ε Μ Α 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο ακέραιος αριθμός  $a=4κ+3$ , όπου  $κ ∈ Ζ$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $α^2$  με το 8 είναι 1. (ΜΟΝΑΔΕΣ 9)

**β)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\frac{α^2 + α}{4}$  είναι ακέραιος. (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

**γ)** Αν  $a = 63$  και  $β = -12$  να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του  $α$  με το  $β$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

**Θ Ε Μ Α 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$  και η υπερβολή με εξίσωση

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

**α)** Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου. (ΜΟΝΑΔΕΣ 9)

**β)** Να βρείτε τις εστίες, τη σταθερή διαφορά  $2α$ , την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής. (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

**γ)** Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού  $λ$ , ώστε η ευθεία  $3x - 4y + λ = 0$  να είναι εφαπτομένη του κύκλου. (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 15<sup>ο</sup>****Θ Ε Μ Α 1<sup>ο</sup>**

**A<sub>1</sub>)** Έστω  $α, β, γ$  ακέραιοι. Αν  $α/β$  και  $α/γ$  να αποδείξετε ότι  $α/β+γ$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 12)

**A<sub>2</sub>)** Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες  $E'$  και  $E$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 3)

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α)** Οι ασύμπτωτες της υπερβολής  $\frac{x^2}{α^2} + \frac{y^2}{β^2} = 1$  είναι οι ευθείες  $y = -\frac{α}{β}x$  και  $y = \frac{α}{β}x$

(ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

**β)** Αν  $\vec{α} \uparrow \downarrow \vec{β}$  τότε  $\vec{α} \cdot \vec{β} = -|\vec{α}| \cdot |\vec{β}|$  και αντιστρόφως (ΜΟΝΑΔΕΣ 2)



γ) Η εξίσωση της ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  που διέρχεται από το σημείο  $A(x_1, y_1)$  είναι η  $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$  (ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

δ) Η εφαπτομένη της παραβολής  $y^2 = 2px$  στο σημείο της  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $yy_1 = 2p(x + x_1)$  (ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

ε) Ο συντελεστής ευθείας παράλληλης με τον άξονα  $\psi' \psi$  δεν ορίζεται. (ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

### Θ Ε Μ Α 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ο ακέραιος  $\alpha$  για τον οποίο ισχύει ότι το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσής του με το **3** είναι **2**.

α) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $\alpha^2$  με το **3** είναι **1**. (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\frac{\alpha^2 + \alpha}{3}$  είναι ακέραιος. (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

γ) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $\alpha^3$  με το **3**. (ΜΟΝΑΔΕΣ 9)

### Θ Ε Μ Α 3<sup>ο</sup>

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  για τα οποία ισχύει  $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ . Δίνεται επίσης το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\vec{AB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ,  $\vec{B\Gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$  και  $AM$  η διάμεσος του.

α) Να υπολογίσετε το  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 3)

β) Να αποδείξετε ότι :  $\vec{AM} = \frac{4\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$  (ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

γ) Να υπολογίσετε το  $|\vec{AM}|$  (ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

δ) Να υπολογίσετε το  $\sigma\upsilon\nu(\vec{AB}, \vec{AM})$  (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

### Θ Ε Μ Α 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2x\eta\mu\theta - 2y\sigma\upsilon\nu\theta - 3 = 0, \theta \in R$  (1)

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο  $C$  για κάθε  $\theta \in R$  του οποίου να βρείτε το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $\rho$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1) ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων του οποίου να βρείτε την ακτίνα. (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon: x\eta\mu\theta + \gamma\sigma\nu\theta - 3 = 0$  είναι εφαπτομένη του κύκλου C για κάθε  $\theta \in \mathbb{R}$  (ΜΟΝΑΔΕΣ 9)

### ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 16<sup>ο</sup>

#### Θ Ε Μ Α 1<sup>ο</sup>

Α. Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  ακέραιοι με  $a \neq 0$ . Αν  $\alpha/\beta$  και  $\alpha/\gamma$  να αποδείξετε ότι  $\alpha/(\beta+\gamma)$ .

(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  είναι οι ευθείες  $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$  και  $y = \frac{\alpha}{\beta}x$

β) Αν  $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$  τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$  και αντιστρόφως

γ) Η εξίσωση της ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  που διέρχεται από το σημείο  $A(x_1, y_1)$  είναι η  $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$

δ) Η εφαπτομένη της παραβολής  $y^2 = 2px$  στο σημείο της  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $yy_1 = p(x + x_1)$

ε) Αν  $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$  τότε  $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$  με  $\vec{\beta} \neq \vec{0}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

#### Θ Ε Μ Α 2<sup>ο</sup>

Δίνονται τα σημεία A και B με συντεταγμένες  $A(2,6)$  και  $B(8,-2)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος  $\overrightarrow{AB}$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το μέσο του AB και είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση  $3x - 6y + 5 = 0$  (ΜΟΝΑΔΕΣ 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το τμήμα AB. (ΜΟΝΑΔΕΣ 6)