<u>ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1$^{\text{Ο}}$</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ον:</u>

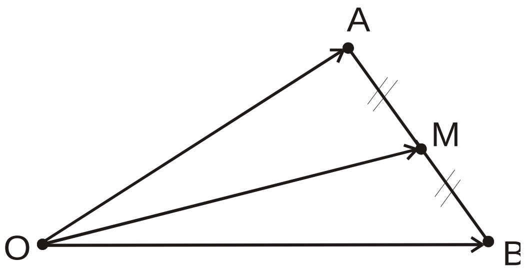
α. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. **Μονάδες 5**

β. Αν $\vec{\alpha}, \vec{v}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}.$$

Μονάδες 10

γ. Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και το Ο ένα σημείο αναφοράς. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα $\vec{OM}$ του μέσου Μ δίνεται από την ισότητα: $\vec{OM} = \dfrac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2}$



Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ 2ον:</u>

Α. Κάθε κωνική της στήλης Α του παρακάτω πίνακα έχει εξίσωση που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α **είδος κωνικής**	**στήλη Β** **εξίσωση γραμμής**

1. κύκλος **2.** παραβολή **3.** έλλειψη **4.** υπερβολή	**Α.** $x + y = 1$ **Β.** $x^2 + y^2 = 0$ **Γ.** $x^2 = 9 - (y - 1)^2$ **Δ.** $9x^2 = 63 + 7y^2$ **Ε.** $y^2 - 16x = 0$ **Ζ.** $4x^2 = 100 - 25y^2$

Μονάδες 12

Β. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

Η εξίσωση $\mathbf{x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0}$ παριστάνει πάντα κύκλο, όταν

Α. $A^2 + B^2 - 4\Gamma$ είναι τέλειο τετράγωνο Β. $|A| + |B| \neq 0$

Γ. $A^2 + B^2 > 4\Gamma$ **Δ.** $4A^2 + 4B^2 - \Gamma < 0$

Ε. $A^2 + B^2 < 4\Gamma$ **Μονάδες 3**

Γ. Να επιλέξετε το ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ από τις παρακάτω προτάσεις **Μονάδες 10**

1. Αν είναι $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) > \frac{\pi}{2}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.

2. Ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\delta}}\, \vec{\alpha}$.

3. Αν $\vec{\alpha} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{5})$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

4. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διευθύνσεως

<u>ΘΕΜΑ 3^{ον}:</u>

Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(-1,0) , Β(3,2) και Γ(-3,4). Να βρείτε:

Α) Την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ **Μονάδες 6**

Β) Την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ, όπου Μ το μέσον της πλευράς ΑΓ **Μονάδες 6**

Γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου **ε** της πλευράς ΑΒ **Μονάδες 7**

Δ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ **Μονάδες 6**

<u>ΘΕΜΑ 4^{ον}</u>

Δίνεται κύκλος **C:** $\mathbf{x^2 + y^2 - 4x - 2y - 2 = 0}$.

Α) Να βρείτε το κέντρο **Κ** και την ακτίνα **ρ** του κύκλου **C**. **Μονάδες 8**

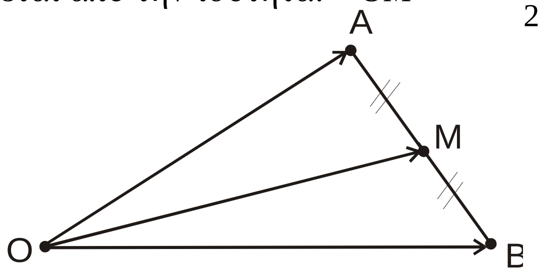
Β) Αν **Α(1,3)** και **Β(3,4)** σημεία του επιπέδου να δείξετε ότι το ένα είναι εσωτερικό και το άλλο εξωτερικό σημείο του κύκλου **C** **Μονάδες 8**

Γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας **ε** που διέρχεται από το σημείο **Α(1,3)** και ορίζει χορδή **ΓΔ** του κύκλου **C** τέτοια ώστε το **Α** να είναι μέσον της χορδής **ΓΔ**. **Μονάδες 9**

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και το Ο ένα σημείο αναφοράς. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα $\vec{OM}$ του μέσου Μ δίνεται από την ισότητα: $\vec{\text{OM}} = \dfrac{\vec{\text{OA}}+\vec{OB}}{2}$



Μονάδες 10

Β) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$(\eta\mu\alpha)\chi + (\sigma\upsilon\nu\alpha)\psi = 2$ παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του α. **Μον. 5**

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1) Η παραβολή $\psi^2 = 2p\chi$ έχει διευθετούσα την $\chi = 2p$

2) Η εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 + \text{A}\chi + \text{B}\psi + \Gamma = 0$ με $\text{A}^2 + \text{B}^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $\text{K}(-\frac{\text{A}}{2}, \frac{\text{B}}{2})$

3) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα αν και μόνο αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| = 0$

4) Τα διανύσματα $\vec{\text{i}} + \vec{\text{j}}$, $\vec{\text{i}} - \vec{\text{j}}$ έχουν ίσα μέτρα. **Μονάδες 10**

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές $Α(-2,4)$, $Β(3,2)$, $Γ(1,-3)$. Να βρεθούν

1) τα διανύσματα $\vec{ΑΒ}$, $\vec{ΑΓ}$ **Μονάδες 5**
2) Η γωνία $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 10**
3) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 10**

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{α}| = 4$, $|\vec{β}| = 2$ και $(\vec{α},\vec{β}) = \frac{π}{3}$

Α. Να αποδείξετε ότι $\vec{α} \cdot \vec{β} = 4$ **Μονάδες 5**

Β. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = \vec{α} + \vec{β}$ **Μονάδες 10**

Γ. Να υπολογίσετε την τιμή του $κ \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα

$\vec{v}_1 = \vec{α} - 3\vec{β}$ και $\vec{v}_2 = κ\vec{α} + \vec{β}$ να είναι κάθετα. **Μονάδες 10**

<u>ΘΕΜΑ 4^{Ο}</u>

Δίνονται τα σημεία $Α(1,-1)$ και $Β(2,0)$ και $Γ(-1,-3)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά. **Μονάδες 8**

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ. **Μονάδες 8**

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση της ευθείας ΑΒ από την ευθεία η , όπου

η: $ψ = χ + 3$. **Μονάδες 9**

<u>ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3^{Ο}</u>

ΘΕΜΑ 1ον

A. α) Πώς ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δυο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

(Μονάδες 5)

β) Για δυο διανύματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$.

(Μονάδες 10)

γ) Για τη γωνία θ δυο μη μηδενικών διανυσμάτων, να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

(Μονάδες 6)

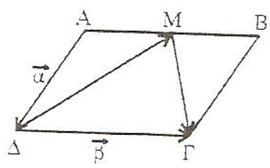
B. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ (Σ) ή ΛΑΘΟΣ (Λ) τις παρακάτω προτάσεις;

α) Η εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 δεν παριστάνει ευθεία όταν Α=**0** και Β= **-2**	Σ - Λ
β) Η απόσταση του Ο(0,0) από την ευθεία ε: $x + y + \sqrt{2} = 0$ είναι ίση με **1**	Σ - Λ
γ) Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες **Ε(0,3)** και **Ε΄(0,-3)** και κύριο άξονα **2α=10** είναι $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$	Σ - Λ
δ) Το κέντρο του κύκλου $x^2 + (y-1)^2 = 1$ είναι πάνω στην ευθεία ε: $y = x + 1$	Σ - Λ

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 2ον

Α. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της ΑΒ.
Αν $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:



α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta M}$ ισούται με:

Α. $\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$ **Β.** $\dfrac{\vec{\beta}-\vec{\alpha}}{2}$ **Γ.** $-\vec{\alpha}+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Δ.** $\vec{\alpha}+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{M\Gamma}$ ισούται με:

Α. $\vec{\alpha}-\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Β.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ **Γ.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ **Δ.** $\vec{\alpha}+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$

γ) Με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα:

Α. $\overrightarrow{AB}$ **Β.** $\overrightarrow{B\Delta}$ **Γ.** $\overrightarrow{\Delta B}$ **Δ.** $\overrightarrow{\Gamma A}$ **Ε.** $\overrightarrow{A\Gamma}$

δ) Με $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα:

Α. $\overrightarrow{A\Gamma}$ **Β.** $\overrightarrow{\Gamma A}$ **Γ.** $\overrightarrow{BA}$ **Δ.** $\overrightarrow{\Delta B}$ **Ε.** $\overrightarrow{B\Delta}$

(Μονάδες 10)

Β) Σε ορθοκανονικό σύστημα Oxy με μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ δίνονται τα σημεία Α (-2, 1) και Β (1, -3).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AB}$.

γ) Να βρείτε το μέτρο του $\overrightarrow{AB}$.

δ) Να υπολογίσετε το διάνυσμα θέσης του μέσου του $\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3^{ΟΝ}

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1,1), Β(-1,3) και Γ(0,4).

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς του ΑΓ.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του ΒΔ.

(Μονάδες 10)

α) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου του ΒΜ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4^{ΟΝ}

Δίδεται κύκλος C_1 με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου C_1 στο σημείο Μ(4,3)

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη ε τέμνει τον κύκλο C_2 με εξίσωση $x^2 + y^2 = 50$ στα σημεία Α(1,7) και Β(7,-1)

(Μονάδες 12)

γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες $ε_1$ και $ε_2$ του κύκλου C_2 στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τέμνονται κάθετα.

(Μονάδες 8)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4^{O}

ΘΕΜΑ 1ο

Α. i) Να γράψετε τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ **(μον.4)**

ii) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου C: $\chi^2 + \psi^2 = \rho^2$ σε ένα του σημείο $A(\chi_1, \psi_1)$ έχει εξίσωση : $\chi\chi_1 + \psi\psi_1 = \rho^2$. **(μον.7)**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. **(μον.8)**

1. Η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι ίση με :

   $(AB) = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$.

2. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2007$ και η ευθεία $y = 1956x$ εφάπτονται.

3. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

4. Η εξίσωση $\chi^2 - 5\psi^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες που περνούν από την αρχή των αξόνων

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. **(μον.6)**

1. Αν $\vec{\alpha} = (\lambda,1)$, $\vec{\beta} = (-2,\lambda+1)$ κάθετα, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

   α. $\lambda=-1$ **β.** $\lambda=0$ **γ.** $\lambda=1$ **δ.** $\lambda=2$

2. Η εξίσωση : $3\chi^2 + 4\psi^2 = 25$ παριστάνει:

   α. κύκλο **β.** έλλειψη **γ.** υπερβολή **δ.** κανένα από τα προηγούμενα

3. Η απόσταση των ευθειών: $\varepsilon_1 : \psi=5$ και $\varepsilon_2 : \psi=1$ είναι: **α.** 2 **β.** 3 **γ.** 4 **δ.** 5

ΘΕΜΑ 2^{O}

Οι συντεταγμένες δύο πλοίων σε ορθοκανονικό σύστημα με αρχή αξόνων το Ο, σε συνάρτηση του χρόνου t αναχώρησης από τα λιμάνια Λ_1 ,Λ_2 ,είναι αντίστοιχα : $\Pi_1(t-1 , 3t+1)$, $\Pi_2(t+2 , 2t)$.

1. Να βρεθεί η θέση των λιμανιών Λ_1 ,Λ_2 και η απόστασή τους. **(μον.6)**
2. Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών στις οποίες κινούνται τα πλοία. **(μον.6)**
3. Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση να συγκρουστούν τα πλοία. **(μον.6)**
4. Να βρείτε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που περικλείεται από τα πλοία και το σημείο Ο, μετά από 2 ώρες. **(μον.7)**

   (Ο χρόνος t μετρείται σε ώρες και οι αποστάσεις στο ορθοκανονικό σύστημα σε ναυτικά μίλια).

ΘΕΜΑ 3^o

Δίνεται η υπερβολή : $16\chi^2 - 9\psi^2 = 144$ και ο κύκλος : $\chi^2 + \psi^2 - 10\psi + 24 = 0$

1. Να βρείτε τις εστίες ,τις ασύμπτωτες, τις κορυφές και την εκκεντρότητα της υπερβολής. **(μον.8)**
2. Να σχεδιάσετε την υπερβολή **(μον.5)**
3. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου **(μον.5)**
4. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου που περνά από τη δεξιά εστία Ε της υπερβολής. **(μον.7)**

ΘΕΜΑ 4^o

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Οχψ με μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$, παίρνουμε τα σημεία Α(-1,2) και Β(1,-2).

1. Να δείξετε ότι τα σημεία Α,Ο,Β είναι συνευθειακά **(μον.5)**
2. Να γράψετε σαν συνάρτηση των $\vec{i}, \vec{j}$ το διάνυσμα ΑΒ **(μον.4)**
3. Να βρείτε ένα σημείο Γ στον άξονα χχ΄ έτσι ώστε: $A\hat{B}\Gamma = 90^0$ **(μον.8)**
4. Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ **(μον.8)**

Καλή επιτυχία

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5^O

Θέμα 1^O

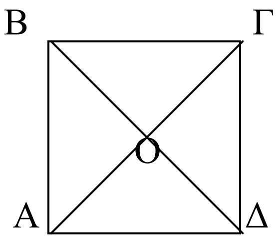
Α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{a}\vec{\gamma}$

Β) Να κάνετε τη σωστή αντιστοίχιση στα παρακάτω

B_1) ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ — ΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ		ΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
1.	$\vec{\alpha}$ =(1,7)	$\vec{\beta}$ =(3 ,-2)	α) οξεία
2.	$\vec{\alpha}$ =(2,-6)	$\vec{\beta}$ =(9,3)	β) ορθή
3.	$\vec{\alpha}$ =(4,1)	$\vec{\beta}$ =(3, 2)	γ) αμβλεία

B_2)



1. Α Β + Α Γ + Γ Δ	α. Ο
2. Β Α + Δ Β + Γ Δ	β. Β Γ
3. Γ Δ + Ο Β + Ο Γ	γ. Α Γ
4. Β Ο + Α Ο + Δ Α + Β Γ	δ. Γ Α

(Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο)

Γ) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α) Αν Α(χ,ψ), τότε d(A, χ΄χ)= ………, d(A, ψ΄ψ)= …….., $\overrightarrow{OA}$ = (….. , ….), όπου Ο η αρχή των αξόνων.

β) Αν $\vec{\alpha}$ = (χ,ψ) και $\vec{\alpha}$ όχι//ψ΄ψ και φ η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα χ΄χ, τότε: $\lambda_{\vec{\alpha}}$ = …….=…….

γ) Ο κύκλος $(\chi-\chi_0)^2 + (\psi-\psi_0)^2 = \rho^2$ εφάπτεται στον χ΄χ όταν ……… Μον. 12+3+4+6

<u>Θέμα 2^Ο</u> **(** Μον. 5χ5)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,2)$, $\vec{\beta}=(\lambda\ ,-6)$ $\vec{\gamma}=(-4\ ,\kappa)$

1. Να βρείτε το λ αν $|\vec{\beta}|=2\sqrt{10}$
2. Να βρείτε το λ αν $\vec{\alpha}\ //\ \vec{\beta}$
3. Να βρείτε το κ αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$
4. Να εξετάσετε αν υπάρχει λ ώστε η γωνία που σχηματίζει το $\vec{\beta}$ με τον χ΄χ να είναι 45^o
5. Να βρείτε τα κ, λ αν $3\vec{\alpha}=\vec{\beta}-\vec{\gamma}$

<u>Θέμα 3^Ο</u> **(** Μον. 7+7+4+7)

Έστω η εξίσωση (2λ+1)χ-(2+λ)y+1-λ=0, $\lambda\in R$ (ε)

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in R$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που παριστάνει η (ε) διέρχονται από σταθερό σημείο.

γ) Από τις παραπάνω ευθείες να βρεθεί εκείνη, που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή Ο των αξόνων.

δ) Για λ= 1, να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α(3,9) από την (ε).

Θέμα 4$^{\text{Ο}}$ (Μον. 5+6+10+4)

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2+\psi^2-2\lambda\chi-1=0$ (1), $\lambda\in R$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

β) Για $\lambda=-3$ να βρείτε:

i) Τα σημεία του κύκλου C, τα οποία απέχουν τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από την αρχή O των αξόνων.

ii) Την εξίσωση της εφαπτομένης ε, του κύκλου C στο σημείο του A(0,1).

ιι) Να βρείτε και την άλλη εφαπτομένη του κύκλου C, η οποία διέρχεται από το B, όπου B το σημείο τομής της ε με τον χ΄χ