

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

Μονάδες 3

β) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα $y'y$ και λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Μονάδες 5, 5

γ) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και θ είναι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι:

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Μονάδες 4

B.

α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1 = (\lambda, \lambda - 1)$ και $\vec{\beta}_1 = (4, \lambda)$, με $\lambda \neq 0$. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\beta}_1$ είναι κάθετα;

- A. $\lambda=1$, B. $\lambda=3$, Γ. $\lambda=2$,
Δ. $\lambda=-2$, Ε. $\lambda=-3$.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6,5

- β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, -\sqrt{3})$,
 $\vec{v} = (2, 2\sqrt{3})$ και $\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$.

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α' με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β'.

ΣΤΗΛΗ Α'

ΣΤΗΛΗ Β'

1. γωνία των \vec{u} και \vec{v}
2. γωνία των \vec{u} και \vec{w}
3. γωνία των \vec{v} και \vec{w}

- A. $\pi/2$
- B. $\pi/6$
- Γ. $\pi/4$
- Δ. $2\pi/3$
- Ε. $3\pi/4$
- Ζ. $\pi/3$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της Στήλης Α' και δίπλα το γράμμα της Στήλης Β' που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 2k + 2$ και $\beta = 6k + 7$, όπου k ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

- α) Οι αριθμοί 3α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Μονάδες 9

- β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $(2\beta - \alpha)$ με το 10 είναι 2.

Μονάδες 8

- γ) Αν ο αριθμός k είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε και ο αριθμός $(\alpha + \beta - 2)$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία $A(8, 0)$ και $B(0, 4)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων O και το μέσο Δ του τμήματος AB .

Μονάδες 9

- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία OD .

Μονάδες 9

- γ) Έστω M τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ε) . Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{OM}^2$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμηγκία. Κάθε μυρμηγκί χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n=1, 2, 3, \dots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:

$$(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1).$$

Να δείξετε ότι:

- α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του

Μονάδες 9

- β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α;

Μονάδες 8

- γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x+y-1=0$ στο σημείο Α.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ .

Μονάδες 2

A.2. Πότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

Μονάδες 4,5

A.3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Μονάδες 6

B.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνεται κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο του $M(1, -3)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M έχει εξίσωση:

A. $x + 3y = 10$, B. $5x - y = 8$, Γ. $x - 3y = 10$,

Δ. $3x + 2y = 3$, E. $\frac{1}{2}x + y = 5$

Μονάδες 4

B.2. Στη Στήλη A δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη Στήλη B τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της Στήλης A και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

Στήλη A	Στήλη B
----------------	----------------

$\alpha. x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$	1. Κ (0, -1), ρ = 2
$\beta. x^2 + (y + 1)^2 = 4$	2. Κ (3, -2), ρ = 1
	3. Κ (3, -2), ρ = 4

Μονάδες 4

B.3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το σημείο (1, -1) ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$.

β. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $y = 2x$ εφάπτονται.

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους ακεραίους της μορφής $\alpha = 6k + \nu$ με $0 \leq \nu < 6$ και k ακέραιος.

Να δείξετε ότι:

α) οι παραπάνω ακέραιοι α που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή $\alpha = 6k + 1$ ή τη μορφή $\alpha = 6k + 5$, όπου k ακέραιος

Μονάδες 10

β) το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος (α) μπορεί να πάρει τη μορφή: $\alpha^2 = 3\mu + 1$, όπου μ ακέραιος

Μονάδες 10

γ) η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος (α) είναι πολλαπλάσιο του 3.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$.

Μονάδες 7

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός k , ώστε τα διανύσματα $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + \vec{3\beta}$ να είναι κάθετα.

Μονάδες 8

γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση ευθείας $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ .

Μονάδες 8

β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία $K(2, 2)$, $\Lambda(-1, 5)$ και $M(1, 3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία K , Λ και M .

Μονάδες 4,5

γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία K και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο M .

Μονάδες 6

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και M .

Μονάδες 6,5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Έστω α, β, γ ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α. Αν $\alpha|\beta$, τότε $\alpha|\lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ .

Μονάδες 4

β. Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|(\beta+\gamma)$.

Μονάδες 4

A.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Έστω α, β φυσικοί αριθμοί και ν το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον $\beta \neq 0$. Τότε:

α. $(\alpha, \beta) < (\beta, \nu)$

β. $(\alpha, \beta) = (\beta, \nu)$

γ. $(\alpha, \beta) > (\beta, \nu)$

δ. $(\alpha, \beta) = (\beta, \nu) + 1$

όπου (α, β) είναι ο Μ.Κ.Δ. των φυσικών αριθμών α, β .

Μονάδες 4,5

B.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $7 | (\alpha+5)$ και $7 | (40-\beta)$ τότε:

α. $7 | (\alpha+\beta)$,

β. $7 | (\alpha+\beta+1)$,

γ. $7 | (\alpha+\beta+2)$,

δ. $7 | (\alpha+\beta-3)$.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Β' ΤΑΞΗ

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Β.2. Να προσδιορίσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4, 5

Β.3. Να εκφράσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112 ως γραμμικό συνδυασμό των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=2$ και

$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

β. τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v}

Μονάδες 8

γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Μονάδες 7

δ. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v} .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$.

α. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι κάθετες.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε ένα σημείο $M(k, \lambda)$ με $k > 0$ και $\lambda > 0$ τέτοιο,

ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, k)$ να είναι παράλληλο προς τη

μία από τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

Μονάδες 6

- δ.** Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων O , άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο M .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

- A.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .

Μονάδες 7

- B.** Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν A, B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$.

Μονάδες 6

γ. Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB .

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Μονάδες 4

B. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

Μονάδες 9

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Ένα διάνυσμα και μία ευθεία, αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης είναι παράλληλα.

β. Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0.$$

γ. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, τότε πάντα ισχύει: $\alpha \cdot \beta \cdot [\alpha, \beta] = \text{LCM}(\alpha, \beta)$ όπου $[\alpha, \beta]$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α, β και (α, β) είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β .

δ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.

Μονάδες 8

Δ. Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** εξισώσεις εφαπτομένων κωνικών τομών στο σημείο επαφής (x_1, y_1) .

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί πάντα στη σωστή εξίσωση εφαπτομένης.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2 + y^2 = \rho^2$	1. $yy_1 = p(x + x_1)$
β. $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	2. $xx_1 + yy_1 = \rho^2$
γ. $y^2 = 2px$	3. $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
δ. $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	4. $xx_1 + yy_1 = 1$
	5. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = \rho^2$
	6. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι αν ο α είναι ακέραιος, τότε και ο $\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2}$ είναι ακέραιος.

Μονάδες 10

Γ. Αν ο α είναι περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο $\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2}$ είναι επίσης περιττός ακέραιος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

Α. την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

Μονάδες 6

Β. τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Μονάδες 10

Γ. την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\cos\theta - 2y\sin\theta - 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 9

Β. Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1,2)$.

Μονάδες 9

Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Β' ΤΑΞΗ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΣΑΒΒΑΤΟ 31 ΜΑΪΟΥ 2003
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\nu}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και η προβολή του $\vec{\nu}$ στο $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\nu}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\nu}.$$

Μονάδες 7

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση) τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Μονάδες 2

β. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xy + x_1y_1 = \rho^2$.

Μονάδες 2

- γ.** Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}.$$

Μονάδες 2

- δ.** Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα \vec{AB} έχουμε

$$\vec{AB} = \vec{OA} - \vec{OB}.$$

Μονάδες 2

- Γ. α.** Αν α, β είναι δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον α ;

Μονάδες 5

- β.** Δίνονται μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ . Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ ;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $\alpha \in \mathbf{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

- A.** Ο αριθμός α^3 παίρνει την μορφή $\alpha^3 = 8k$ όπου $k \in \mathbf{Z}$ ή $\alpha^3 = 2k+1$ όπου $k \in \mathbf{Z}$.

Μονάδες 12

- B.** Ο αριθμός $\alpha(\alpha^2+1)$ είναι άρτιος.

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Β' ΤΑΞΗ

Μονάδες 13

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$,

$B(1, 2)$ και $\Gamma(2, 3)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$.

A. Να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο \mathbb{R} .

Μονάδες 8

B. Εάν $\lambda = 1$, να βρείτε:

α. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

Μονάδες 8

β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή $A(1, 5)$ και εφάπτεται στην ευθεία $B\Gamma$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται δύο κωνικές τομές:

η παραβολή $y^2 = 2px$, και

η έλλειψη $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$, $p > 0$.

A. Να αποδείξετε ότι οι εστίες E και E' της έλλειψης είναι τα σημεία $E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ και

$E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$.

Μονάδες 8

Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής K και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία

$$K\left(\frac{p}{2}, p\right) \text{ και } \Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right).$$

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες.

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, να γίνουν με στυλό διαρκείας (μπλε ή μαύρο).
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μετά την
10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 24 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** του

παρακάτω πίνακα και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της

Στήλης II, έτσι ώστε να προκύπτει η σωστή αντιστοίχιση. (Δύο στοιχεία της **Στήλης II** περισσεύουν).

Στήλη I Είδος κωνικής τομής	Στήλη II Εξίσωση γραμμής
α. Παραβολή	1. $x^2 + y^2 = \rho^2$
β. Κύκλος	2. $x + y = \alpha$, $\alpha \neq 0$
γ. Υπερβολή	3. $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, α , $\beta > 0$
δ. Έλλειψη	4. $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, α , $\beta > 0$
	5. $y^2 = 2px$, $p > 0$
	6. $x^3 = \beta y^2$, $\beta \neq 0$

Για κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις **Β.** και **Γ.**, να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη **(Σ)**, αν αυτή είναι **Σωστή** ή **(Λ)**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

Β. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, που σχηματίζουν γωνία θ , τότε ισχύει:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} .$$

Μονάδες 3

Γ. Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , τότε η εξίσωσή της είναι:

$$y = \lambda x + \beta, \text{ με } \beta \neq 0 .$$

Μονάδες 3

Δ. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$,

$$\vec{\beta} = (x_2, y_2) \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} =$$

(x_3, y_3) . Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \quad (\text{Επιμεριστική$$

ιδιότητα).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 , με εξισώσεις $\varepsilon_1: 3x - 2y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + 3y - 8 = 0$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε_1 είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 .

Μονάδες 5

β) Υποθέτουμε ότι το σημείο $A(\alpha, 2)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 και το σημείο $B(-5, \beta)$ ανήκει στην ευθεία ε_2 .

β₁) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

Μονάδες 6

β₂) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $3x - y + 3 = 0$.

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}|=3, \quad |\vec{\beta}|=2, \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους θετικούς αριθμούς x, y για

$$\text{τους οποίους ισχύει η σχέση } (\vec{\alpha} + x\vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = 17$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x - 2\lambda y = 0, \quad (1)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η γραμμή που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι, για τις διάφορες τιμές του λ , η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο

$$K(2, \lambda) \text{ και ακτίνα } \rho = \sqrt{\lambda^2 + 4}$$

Μονάδες 5

γ) Για $\lambda = 2$, να αποδείξετε ότι ο κύκλος, που ορίζεται από την εξίσωση (1), τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ σε σημεία A και B αντίστοιχα, διαφορετικά από την αρχή O , τέτοια ώστε το τρίγωνο OAB να είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

δ) Για $\lambda = 2$, να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -x$ εφάπτεται στον κύκλο, που ορίζεται από την εξίσωση (1), στο σημείο $O(0, 0)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο

και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.

4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 29 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα $\gamma'\gamma$ και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Μονάδες 10

B. Έστω δύο σημεία E και E' ενός επιπέδου. Τι

ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία E και E' στο συγκεκριμένο επίπεδο ;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν

γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.

Μονάδες 2

β. Στην παραβολή $y^2=2px$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = \frac{p}{2}$

Μονάδες 2

γ. Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, k, \lambda$ με $\alpha \neq 0$.

Αν α/β και α/γ , τότε $\alpha/(k\beta + \lambda\gamma)$.

Μονάδες 2

δ. Αν A, B, Γ είναι κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε το εμβαδόν του είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})|$$

Μονάδες 2

ε. Η εκκεντρότητα e της έλλειψης είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$

A. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

Μονάδες 8

B. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε τον αριθμό $k \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{v} = (k^2 - k, k)$

να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο ακέραιος αριθμός $\alpha = 12k - 5$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

A. Να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 7

B. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α διά του 4.

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = (\alpha^2 + 15)(\alpha^2 - 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 64.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: 3x + 4y + 6 = 0$ και

$\varepsilon_2: 3x + 4y + 16 = 0$.

A. Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 7

B. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα $x'x$ και

αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους $d = 4\sqrt{3}$.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30' πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΙΟΥΝΙΟΥ 1999
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να χαρακτηρίσετε στο τετράδιό σας τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη "Σωστό" ή "Λάθος" δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.

α) 1. Αν η προσεγγιστική τιμή ενός μεγέθους είναι μεγαλύτερη από την πραγματική τιμή του, τότε η προσέγγιση λέγεται προσέγγιση με υπέρβαση.

Μονάδες 1

2. Το σφάλμα προσέγγισης είναι πάντοτε θετικό.

Μονάδες 1

3. Αν x είναι η αληθής τιμή μιας ποσότητας και α μια προσέγγισή της, τότε το απόλυτο σφάλμα Δ της προσέγγισης $x \cong \alpha$ είναι $\Delta = x - \alpha$.

Μονάδες 1

4. Σχετικό σφάλμα δ της προσέγγισης $x \cong a$ ($a \neq 0$) ονομάζεται ο λόγος του απόλυτου σφάλματος Δ προς την απόλυτη τιμή της προσεγγιστικής τιμής a .

Μονάδες 1

β) Να αποδείξετε ότι:

Αν σ_a είναι η ακρίβεια της προσέγγισης $x \cong a$ και σ_b η ακρίβεια της προσέγγισης $y \cong b$, τότε η ακρίβεια της προσέγγισης του $x+y$ από το άθροισμα $a+b$ δίνεται από τον τύπο

$$\sigma_{a+b} = \sigma_a + \sigma_b.$$

Μονάδες 8,5

B. α) Η πραγματική τιμή ενός μεγέθους είναι $x=8$ και μια προσεγγιστική τιμή του είναι $a=9$.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της στήλης I και δίπλα το γράμμα της στήλης II που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

I	II
1. Απόλυτο σφάλμα	α) -1
2. Σχετικό σφάλμα	β) 1
3. Σφάλμα προσέγγισης	γ) 1/8
	δ) -1/9
	ε) 1/9

Μονάδες 7,5

- β) Έστω οι προσεγγίσεις $x = 12,7 \pm 0,1$ και $y = 7,3 \pm 0,1$
Να βρείτε την ακρίβεια της προσέγγισης του αθροίσματος $x+y$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Το βάρος ενός ατόμου ήταν $B_0 = 80$ Kgr και υπέστη τρεις διαδοχικές μεταβολές. Στην πρώτη μεταβολή αυξήθηκε κατά 20% και έγινε B_1 , στη δεύτερη μεταβολή το βάρος B_1 μειώθηκε κατά 10% και έγινε B_2 και στην τρίτη μεταβολή το βάρος B_2 μειώθηκε και πάλι, και το άτομο επανήλθε στο αρχικό του βάρος B_0 .

Να βρείτε:

- α) Τους δείκτες εξέλιξης ε_{01} και ε_{12} της πρώτης και δεύτερης μεταβολής αντιστοίχως.

Μονάδες 10

- β) Να βρείτε το βάρος του ατόμου στο τέλος της δεύτερης μεταβολής.

Μονάδες 5

- γ) Ποιος είναι ο δείκτης εξέλιξης ε_{23} της τρίτης μεταβολής;

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (5\kappa, 3-\lambda)$,
 $\vec{\beta} = (4-\lambda, 4\kappa)$, όπου κ, λ πραγματικοί αριθμοί.

- α) Για ποιες τιμές των κ και λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα;

Μονάδες 15

β) Αν $\lambda=8$, κ θετικός και τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, τότε το κ είναι ίσο με:

A. 4, B. 1, Γ. 2, Δ. 3, E. 5

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Ομογενής επίπεδη τετραγωνική πλάκα πλευράς $a=2$ βρίσκεται επάνω στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy . Το κέντρο της πλάκας συμπίπτει με την αρχή O των αξόνων και οι πλευρές της είναι παράλληλες με τους άξονες.

Μια δεύτερη τετραγωνική πλάκα από το ίδιο υλικό βρίσκεται επάνω στο ίδιο σύστημα Oxy και έχει τις δύο απέναντι κορυφές της στα σημεία $A(1,0)$ και $\Gamma(5,0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους του συστήματος που αποτελείται από τις δύο τετραγωνικές πλάκες, όπως αυτές είναι τοποθετημένες στο σύστημα συντεταγμένων.

Μονάδες 10

β) Αφαιρούμε, τώρα, από τη δεύτερη τετραγωνική πλάκα μια τετραγωνική

πλάκα με το ίδιο κέντρο και πλευρές παράλληλες προς αυτήν. Ποια πρέπει να είναι η πλευρά της πλάκας που αφαιρούμε έτσι, ώστε το κέντρο βάρους του συστήματος που θα προκύψει να βρίσκεται στο σημείο $A(1,0)$;

Μονάδες 15

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να δείξετε ότι, σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση του κύκλου C , με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ , είναι $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$

Μονάδες 12,5

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **B1** και **B2**.

B1. Το κέντρο K και η ακτίνα ρ του κύκλου $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ είναι:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| α) $K(2, -1), \rho=4$ | β) $K(2, -1), \rho=2$ |
| γ) $K(-2, 1), \rho=2$ | δ) $K(-2, 1), \rho=4$ |

Μονάδες 2,5

B2. Το κέντρο του κύκλου $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ ανήκει στην ευθεία:

- α) $y=x+2$, β) $y=2x-1$, γ) $2x+y=5$, δ) $3x+2y=7$

Μονάδες 4

B3. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση: $x^2 + y^2 = 49$.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα σημεία της στήλης I και δίπλα τον αριθμό της στήλης II που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη I	Στήλη II
A(0,7)	1. εσωτερικό σημείο του κύκλου C
B(3,4)	2. σημείο του κύκλου C
Γ(7,-2)	3. εξωτερικό σημείο του κύκλου C
Δ(-7,0)	

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Ένας γιατρός παίρνει δύο διαδοχικές μετρήσεις της αρτηριακής πίεσης ενός ασθενούς με διαφορά λίγων λεπτών. Κατά την πρώτη μέτρηση η πίεση του ασθενούς βρέθηκε 15,6 , ενώ κατά τη δεύτερη μέτρηση η πίεση βρέθηκε 14,4.

A. Υποθέτοντας ότι η πραγματική τιμή της πίεσης βρίσκεται μεταξύ των δύο αυτών τιμών, να βρείτε ποια από τις δύο αυτές τιμές είναι προσέγγιση με έλλειψη και ποια προσέγγιση με υπέρβαση.

Μονάδες 5

B. Αν θεωρήσουμε ως προσεγγιστική τιμή της πίεσης το μέσο όρο των δύο προηγούμενων τιμών, να βρείτε:

α) την ακρίβεια της προσέγγισης,

Μονάδες 10

β) τη σχετική ακρίβεια της προσέγγισης.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Ένα προϊόν έχει αρχική τιμή 100.000 δρχ.

α) Ποια είναι η τελική τιμή του προϊόντος, αν στην αρχική τιμή γίνει αύξηση 12% και στη συνέχεια έκπτωση 8% ;

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι η τελική τιμή πώλησης του προϊόντος δεν αλλάζει, αν στο προϊόν γίνει αρχικά έκπτωση 8% και στη συνέχεια έκπτωση 12% ή αν γίνει αρχικά έκπτωση 12% και στη συνέχεια έκπτωση 8%.

Μονάδες 9

- γ) Να αποδείξετε ότι η τιμή πώλησης, στην περίπτωση που γίνεται έκπτωση 20% στην αρχική τιμή, είναι μικρότερη από την τιμή πώλησης που προκύπτει από το ερώτημα β).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Τα σχέδια κατασκευής του υπόγειου σιδηρόδρομου (ΜΕΤΡΟ) μιας πόλης, σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy , περιλαμβάνουν:

Τη γραμμή Γ_1 με διανυσματική εξίσωση

$\epsilon_1 : \vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j} + \lambda(\vec{i} + 3\vec{j})$, $\lambda \in \mathbf{R}$ και τη γραμμή Γ_2 , που διέρχεται από το σταθμό $\Sigma(-3,2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (2,-1)$.

- α) Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής Γ_1 στη μορφή $Ax+By+\Gamma=0$.

Μονάδες 5

- β) Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής Γ_2 στην ίδια μορφή με το ερώτημα α).

Μονάδες 7

- γ) Στο σημείο $O(0,0)$ πρέπει να κατασκευαστεί ένας νέος σταθμός, που θα εξυπηρετεί μια συγκεκριμένη περιοχή. Δεδομένου ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους γραμμής είναι το ίδιο για όλες τις περιοχές, με ποια από τις γραμμές Γ_1 και Γ_2 πρέπει να συνδεθεί ο νέος σταθμός έτσι, ώστε η γραμμή σύνδεσής του να έχει το μικρότερο κόστος;

Μονάδες 13

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα

θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!