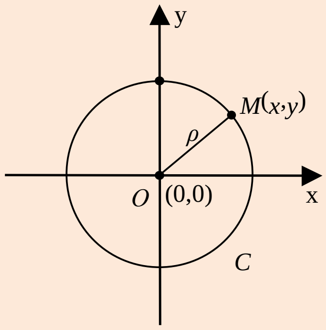
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ, είναι $x^2 + y^2 = \rho^2$

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ. Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του O απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει: $(OM) = \rho$ (1)



Όμως, $(OM) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Επομένως, η (1) γράφεται $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ ή, ισοδύναμα, $x^2 + y^2 = \rho^2$ (2)

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι οι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου και μόνο αυτές επαληθεύουν την εξίσωση (2). Άρα, ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2}$$

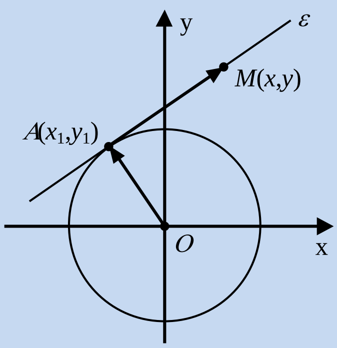
Για παράδειγμα, ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Ο κύκλος αυτός λέγεται **μοναδιαίος κύκλος**.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2}$ σε ένα σημείο του $M(x,y)$, είναι : $\boxed{xx_1 + yy_1 = \rho^2}$

Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$.

Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν $OA \perp AM$, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$\vec{OA}\,\vec{AM} = 0$. (1)



Όμως $\vec{OA}=(x_1,y_1)$ και $\vec{AM}=(x-x_1,y-y_1)$. Έτσι η (1) γράφεται διαδοχικά

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0$$
$$xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$$
$$xx_1+yy_1=\rho^2,$$ αφού $x_1^2+y_1^2=\rho^2$.

Επομένως, η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

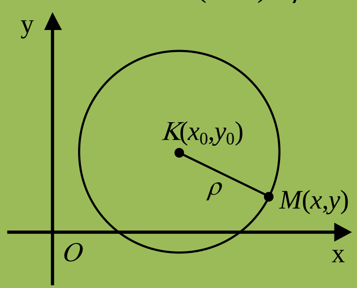
$$\boxed{xx_1+yy_1=\rho^2}$$

Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα $\rho>0$, έχει εξίσωση :

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2}$$

- Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ. Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του K απόσταση ίση με ρ, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$(KM)=\rho \qquad (1)$$



Όμως, $(KM)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho$$ ή, ισοδύναμα,
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2.$$

Άρα, ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2}$$

Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής αυτής παριστάνει κύκλο	Γνωρίζουμε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ, έχει εξίσωση $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2}$ • Αν τώρα εκτελέσουμε τις πράξεις, η εξίσωση γράφεται $$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-\rho^2)=0,$$ δηλαδή παίρνει τη μορφή $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$, (1) όπου $A=-2x_0$, $B=-2y_0$ και $\Gamma=x_0^2+y_0^2-\rho^2$. ***Αντιστρόφως,*** κάθε εξίσωση της μορφής (1) γράφεται διαδοχικά: $$(x^2+Ax)+(y^2+By)=-\Gamma$$ $$\left(x^2+2\frac{A}{2}x+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+2\frac{B}{2}y+\frac{B^2}{4}\right)=-\Gamma+\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}$$ $$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4}.$$ Επομένως: ☐Αν $A^2+B^2-4\Gamma>0$, η εξίσωση (3) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$. ☐Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$, η εξίσωση (3) παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$. ☐Αν $A^2+B^2-4\Gamma<0$, η εξίσωση (3) είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x,y)$ των οποίων οι συντεταγμένες να την επαληθεύουν.