

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

Για τις επόμενες δύο ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (**1.A.α** και **1.A.β**) και, δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος \vec{AB} με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις:

A. $x = x_2 + x_1$ και $y = y_2 + y_1$

B. $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Γ. $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$

Δ. $x = y_2 - x_1$ και $y = y_1 - x_2$

$$\mathbf{E.} \quad x = x_1 - x_2 \quad \text{και} \quad y = y_1 - y_2$$

Μονάδες 6,5

β. Η απόσταση των σημείων A (x_1 , y_1) και B (x_2 , y_2) δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{A.} \quad (AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\mathbf{B.} \quad (AB) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

$$\mathbf{Γ.} \quad (AB) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\mathbf{Δ.} \quad (AB) = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$$

Μονάδες 6

B. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία A (2, 3) και B (5, 7).

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{AB} .

Μονάδες 6

β. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B.

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 3$.

Μονάδες 8

β. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(0, 1)$ και ακτίνα $\rho = 4$.

Μονάδες 9

γ. Να ελέγξετε αν το σημείο $A(2, \sqrt{5})$ ανήκει στους παραπάνω κύκλους.

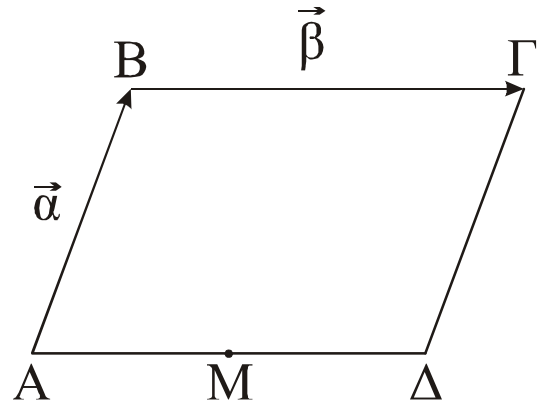
Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού

σχήματος είναι $\vec{AB} = \vec{\alpha}$

και $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta}$, ενώ το M είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Delta$.

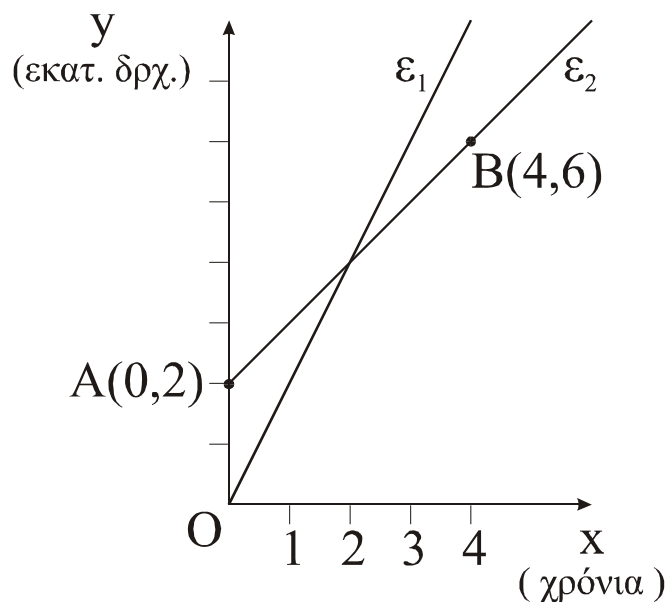


Στη στήλη **I** του παρακάτω πίνακα δίνονται ορισμένα διανύσματα του σχήματος, ενώ στη στήλη **II** διάφορες εκφράσεις. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης και, δίπλα ακριβώς, τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΣΤΗΛΗ I		ΣΤΗΛΗ II	
A.	$\vec{A\Gamma}$	1.	$-\vec{\beta}$
B.	$\vec{\Delta A}$	2.	$\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$
Γ.	$\vec{M A}$	3.	$\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
Δ.	$\vec{M B}$	4.	$\vec{\alpha} - \frac{\vec{\beta}}{2}$
Ε.	$\vec{\Delta B}$	5.	$\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
		6.	$\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
		7.	$-\frac{\vec{\beta}}{2}$

ΘΕΜΑ 4ο

Τα έσοδα y (σε εκατομμύρια δρχ.) μιας εταιρείας από τις πωλήσεις ενός προϊόντος, x χρόνια μετά την έναρξη κυκλοφορίας του προϊόντος στην αγορά, περιγράφονται από την ευθεία ε_1 του παρακάτω σχήματος. Η ευθεία ε_2 περιγράφει τα αντίστοιχα έξοδα της εταιρείας για το



προϊόν αυτό. Η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση $y = 2x$, ενώ η ε_2 διέρχεται από τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(4, 6)$.

α. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας ε_2 .

Μονάδες 10

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 .

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τα έσοδα και τα έξοδα της εταιρείας 1 χρόνο μετά την έναρξη κυκλοφορίας του προϊόντος. Ποια θα είναι

τα έσοδα και τα έξοδά της 3 χρόνια μετά
την έναρξη κυκλοφορίας του προϊόντος;

Μονάδες 5

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α. Στην επόμενη ερώτηση να γράψετε τον αριθμό της (1.Α.α) και, δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι:

Α. $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$

Β. $\lambda = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}$

Γ. $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Δ. $\lambda = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$

Ε. $\lambda = \frac{y_2}{y_1} - \frac{x_2}{x_1}$

Μονάδες 4,5

β. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Μονάδες 4

γ. Έστω οι ευθείες ε_1 και ε_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Αναφέρετε ποια είναι η σχέση που πρέπει να ισχύει μεταξύ των λ_1, λ_2 όταν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ποια όταν $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

Μονάδες 4

β. Μια ευθεία ε περνάει από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(3, 5)$.

α. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε .

Μονάδες 3,5

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε είναι:

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

Μονάδες 3

γ. Ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι παράλληλη προς την ευθεία ε και ποια είναι κάθετη στην ε ;

$$\varepsilon_1: y = -\frac{3}{4}x + 15 \quad \varepsilon_2: y = \frac{4}{3}x + 105$$

$$\varepsilon_3: y = -\frac{4}{3}x + 1 \quad \varepsilon_4: y = \frac{3}{4}x$$

$$\varepsilon_5: y = \frac{3}{4}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία $A(-4, 3)$ και $B(4, -3)$. Να βρείτε:

α. Την απόσταση (AB) των σημείων A και B .
Μονάδες 6

β. Τις συντεταγμένες του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος AB .
Μονάδες 6

γ. Την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB .
Μονάδες 7

δ. Την εφαπτομένη του κύκλου αυτού στο σημείο A .
Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 1, 1)$.

α. Να βρείτε το λ έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι ίσο με -6 .
Μονάδες 12,5

β. Να βρείτε το λ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.
Μονάδες 12,5

ΘΕΜΑ 4ο

Η αρχή $O(0, 0)$ ενός συστήματος συντεταγμένων παριστάνει ένα σταθμό εκπομπής σημάτων, ενώ τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(5, 1)$ παριστάνουν τις θέσεις δύο πλοίων. Η θέση ενός τρίτου πλοίου παριστάνεται από το σημείο Γ για το οποίο ισχύει:

$$\vec{O\Gamma} = 2\vec{O\Lambda} - \vec{O\beta}$$

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

Μονάδες

13

β. Αν η εμβέλεια του σταθμού εκπομπής (μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί να φτάσει το σήμα) είναι 5 μονάδες, να βρείτε με ποια από τα τρία πλοία μπορεί να επικοινωνήσει ο σταθμός.

Μονάδες

12

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 12 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Ας θεωρήσουμε δύο οποιαδήποτε διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

Για καθεμιά από τις επόμενες ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της **(1.Α.α, 1.Α.β και 1.Α.γ)** και ακριβώς δίπλα, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α) Οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB είναι:

Α. $\left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right)$

Β. $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

Γ. $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

Δ. $(2x_1, 2y_2)$

β) Οι συντεταγμένες του $\xrightarrow{\text{Μονάδες 4, 5}}$ διανύσματος AB είναι:

Α. $(x_2 + x_1, y_2 + y_1)$

Β. $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Γ. $(x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2)$

Δ. $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Μονάδες 4

γ) Η απόσταση των σημείων Α και Β είναι ίση με:

Α. $\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{y_1 + y_2}$

Β. $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

Γ. $\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (y_1 + y_2)^2}$

Δ. $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Μονάδες 4

Β. Δίνονται τα σημεία $A(5, 7)$, $B(13, 7)$, $\Gamma(9, 1)$, $\Delta(1, 1)$ και Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των σημείων Κ, Λ, Μ, Ν.

β) Το μήκος του τμήματος ΝΚ.

γ) Τις συντεταγμένες του διανύσματος \vec{BD}

Μονάδες 12, 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα

$\vec{\alpha} = (\lambda, 2)$, $\vec{\beta} = (6, 4)$ και $\vec{\gamma} = (8, 0)$. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει:

α) $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

Μονάδες 8

β) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

Μονάδες 9

γ) $\vec{\alpha} \square \vec{\beta}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση κύκλου $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι το σημείο $A(-1, 3)$ είναι σημείο του κύκλου.

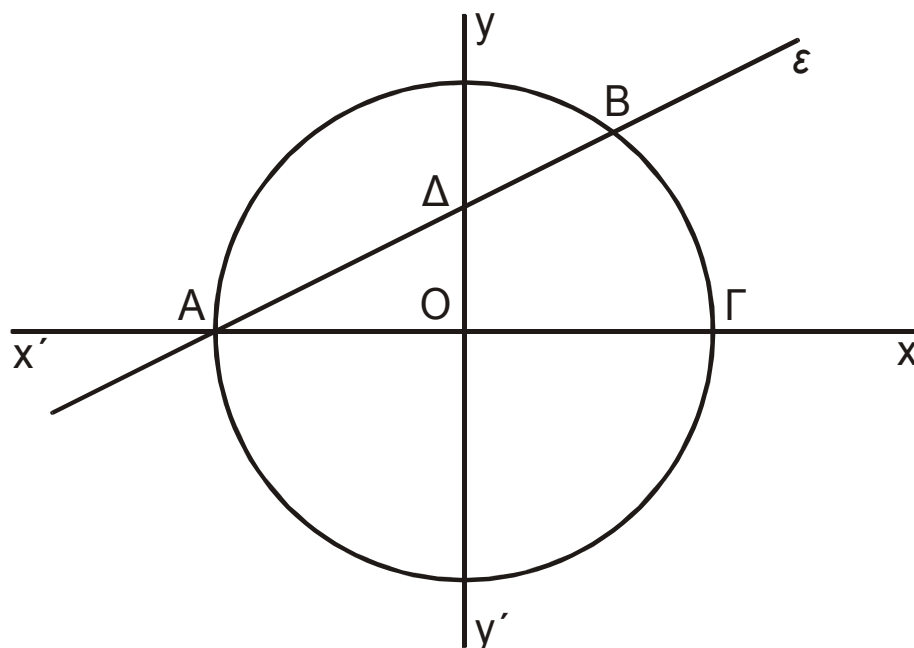
Μονάδες 5

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $A(-1, 3)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$ και η ευθεία ε με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.



α) Να αποδείξετε ότι τα κοινά σημεία του κύκλου C και της ευθείας ε είναι τα $A(-5,0)$ και $B(3,4)$.

Μονάδες 5

β) Αν $\Gamma(5,0)$ είναι σημείο τομής του άξονα $x'x$ με τον κύκλο C , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Γ και είναι παράλληλη προς την ευθεία ε .

Μονάδες 10

γ) Αν Δ είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Δ και είναι κάθετη στην ευθεία ε .

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 11 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. 1. Δίνονται τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$.

α. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

Μονάδες 3,5

β. Να γράψετε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

Μονάδες 3

A. 2. Στις επόμενες ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (**A.2.α**, **A.2.β**) και, δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνονται δύο τυχούσες ευθείες ε_1 και ε_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα.

α. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, τότε ισχύει:

A. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, **B.** $\lambda_1 = \lambda_2$, **Γ.** $\lambda_1 \lambda_2 = 1$,
Δ. $\lambda_1 \lambda_2 = -1$

Μονάδες 3

β. Αν $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$, τότε ισχύει:

A. $\lambda_1 = -\lambda_2$, **B.** $\lambda_1 = \lambda_2$, **Γ.** $\lambda_1 \lambda_2 = -1$,
Δ. $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$

Μονάδες 3

Β. Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(3, 5)$ και οι ευθείες

$$\varepsilon_1: y = 2x + 7, \quad \varepsilon_2: 2y = -x + 14$$

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB .

Μονάδες 6,5

β. Ποια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετη και ποια είναι παράλληλη στην ευθεία AB ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 24$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Μονάδες 13

β. Να βρείτε ποια από τα σημεία $A(10, -4)$, $B(3, 3)$ και $\Gamma(1, 0)$ είναι σημεία του κύκλου.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία $O(0, 0)$, $A(0, -3)$, $B(4, 3)$, $\Gamma(-2, -6)$ και $M(x, y)$ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB .

α. Να εξετάσετε αν τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 7

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB .

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{OM} \cdot \vec{OB}$.
Μονάδες 6

δ. Να βρείτε την προβολή \vec{OM}_1 του
διανύσματος \vec{OM} πάνω στο διάνυσμα \vec{OB} .
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται τα σημεία $A(2, 2)$, $B(5, 0)$,
 $\Gamma(3, -6)$, $O(0, 0)$.

α. Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων
 \vec{OA} και \vec{OB} .

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του
διανύσματος

$$\vec{OD} = 3\vec{OA} - 2\vec{OB} + \vec{OG}$$

και να εξετάσετε αν το σημείο Δ είναι
σημείο της έλλειψης $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

Μονάδες 15

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** του παρακάτω πίνακα και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη I Εξισώσεις γραμμών	Στήλη II Περιγραφές εξισώσεων γραμμών
A.	1. Εξίσωση εφαπτομένης 2. Εξίσωση κύκλου με κ 3. Εξίσωση κύκλου με κ 4. Εξίσωση ευθείας που 5. Εξίσωση παραβολ
B.	
Γ. $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho$ 2	

Μονάδες 12,5

B.

1. Δίνεται η εξίσωση του κύκλου:

$$(x-3)^2 + (y-10)^2 = 64$$

α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του. *Μονάδες 6*

β) Να δείξετε ότι το σημείο $A(11, 10)$ ανήκει στον κύκλο. *Μονάδες 3*

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $B(2, 2)$ του κύκλου $x^2 + y^2 = 8$.

Μονάδες 3,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, \lambda + 2)$, $\vec{\beta} = (2, 1)$
και

$$\vec{\gamma} = (0, 7).$$

Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία είναι:

1) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ *Μονάδες 9*

2) $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ *Μονάδες 9*

3) $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ *Μονάδες 7*

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία $O(0, 0)$, $A(0, 12)$
και $B(6, 8)$.

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Να βρείτε:

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

α) τις συντεταγμένες των μέσων Κ και Λ των τμημάτων ΑΟ και ΑΒ αντίστοιχα, *Μονάδες 8*

β) το μέτρο $\left| \overrightarrow{ΚΛ} \right|$ του διανύσματος $\overrightarrow{ΚΛ}$,
Μονάδες 8

γ) την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\overrightarrow{ΟΒ}$.
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: y = x + 5 \quad , \quad \varepsilon_2: y = 10 \quad .$$

Έστω Α το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 . Θεωρούμε τα σημεία Β (6 , 11) και Δ (10 , 10) τα οποία ανήκουν στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Να βρείτε:

α) ένα σημείο Γ (x , 10) της ευθείας ε_2 έτσι ώστε να ισχύει $\overrightarrow{ΒΑ} \cdot \overrightarrow{ΒΓ} = 0$, *Μονάδες 7*

β) τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$,
Μονάδες 8

γ) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Δ(10 , 10) και είναι κάθετη προς την ευθεία ε_1 .
Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 6ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης : Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

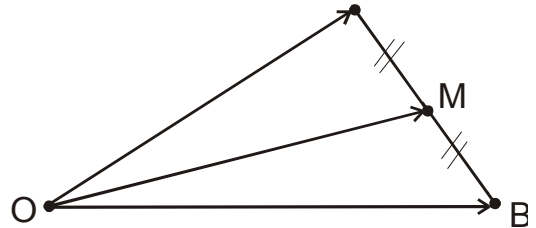
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Στο παρακάτω σχήμα το σημείο M είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και το O ένα σημείο αναφοράς. Να αποδείξετε ότι η διανυσματική

ακτίνα \vec{OM} του μέσου M δίνεται από την

ισότητα:
$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$



Μονάδες 10

B. Για τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (**B.1**, **B.2**, **B.3**) και, δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Η συνθήκη παραλληλίας δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ που έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα είναι:

α. $\lambda_1 = -\lambda_2$

β. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

γ. $\lambda_1 = \lambda_2$

δ. $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$

Μονάδες 5

2. Η αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι:

α. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2$

β. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

γ. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$

δ. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$

Μονάδες 5

3. Αν μία ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση:

α. $x = x_0$

β. $y = y_0$

γ. $y = x$

δ. $y = -x$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται το σημείο $A(1, 2)$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 1$.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και

α. είναι παράλληλη στην ευθεία ε

Μονάδες 6

β. είναι κάθετη στην ευθεία ε

Μονάδες 6

γ. είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Μονάδες 6

δ. από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία $A(2,9)$, $B(3,4)$, $\Gamma(5,7)$
και το διάνυσμα $\vec{x} = (\kappa - 2, \lambda - 5)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των
διανυσμάτων \vec{AB} , $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{A\Gamma}$.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών
αριθμών κ , λ για τις οποίες ισχύει:

$$\vec{x} = \vec{B\Gamma} - 2\vec{AB} .$$

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος
 $\vec{B\Gamma} - 2\vec{AB}$.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι
ορθογώνιο στο Γ .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(3,3)$
και ακτίνα $R = \sqrt{8}$, η ευθεία $y = x$, το
σημείο $\Gamma(1,5)$ και τα σημεία τομής A, B της
ευθείας με τον κύκλο.

α. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ είναι σημείο
του κύκλου.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A
και B .

Μονάδες 8

δ. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

Μονάδες 7

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Με το \vec{a}^2 συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{a}$ και με το $|\vec{a}|$ συμβολίζουμε το μέτρο του διανύσματος \vec{a} .

Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Μονάδες 10

B. Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (**B.1**, **B.2**, **B.3**) και, δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Αν για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου είναι $\vec{a} // \vec{\beta}$, τότε ισχύει:

α) $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 2$

β) $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$

γ) $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = -1$

δ) $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) \neq 0$

Μονάδες 5

2. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου είναι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε ισχύει:

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \neq 0$

β) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$

γ) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

δ) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$

Μονάδες 5

3. Η εξίσωση του κύκλου C με κέντρο την αρχή $O(0,0)$ ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων Oxy του επιπέδου και ακτίνα ρ είναι:

α) $(x-1)^2 + y^2 = \rho^2$

β) $x^2 + (y-1)^2 = \rho^2$

γ) $x^2 + y^2 = (\rho-1)^2$

δ) $x^2 + y^2 = \rho^2$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 1)$, $\vec{\beta} = (5, 7)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 3\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ , για την οποία το διάνυσμα $\vec{x} = (\lambda, -6)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{y} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\frac{1}{2}\vec{y}$, όπου $\vec{y} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι κύκλοι C_1 , C_2 με εξισώσεις:

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$C_2: (x + 2\kappa)^2 + (y - \lambda)^2 = 25, \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C_1 έχει κέντρο το σημείο $K_1(2, 1)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ έτσι ώστε οι κύκλοι C_1 και C_2 να έχουν το ίδιο κέντρο.

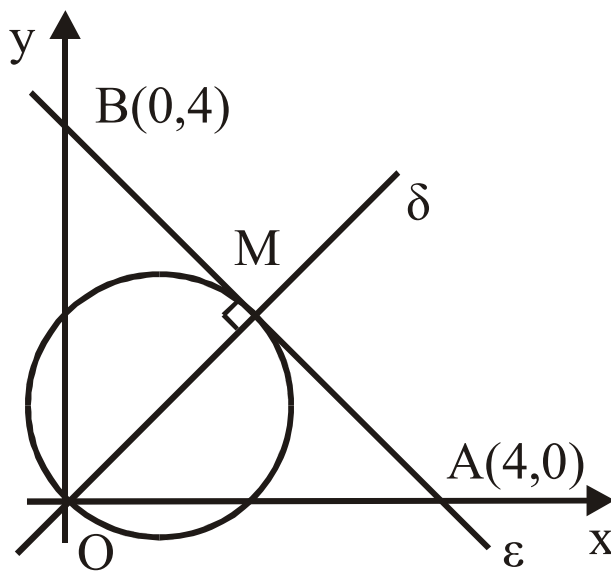
Μονάδες 9

γ) Να εξετάσετε, αν τα σημεία $A(4, 1)$, $B(1, 1)$ ανήκουν στον κύκλο C_1 .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy του παρακάτω σχήματος, δίνονται τα σημεία $A(4,0)$ και $B(0,4)$, η ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία A και B και η ευθεία δ που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι κάθετη προς την ευθεία ε .



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε είναι $x+y=4$.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ .

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών δ και ε .

Μονάδες 5

δ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα OM .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ**

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι:

Οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος \vec{AB} με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, δίνονται από τις σχέσεις:

$$x = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad y = y_2 - y_1 .$$

Μονάδες 9

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη **(Σ)**, αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ , τότε :

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Μονάδες 4

2. Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$, τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Μονάδες 4

3. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι πάντα ίσο με τη διαφορά των

γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

Μονάδες 4

4. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A (x_1, y_1) και B (x_2, y_2), με $x_1 \neq x_2$ είναι: $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία A (5, -3), B (-4, 9) και Γ (-1, 5).

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \vec{BA} και \vec{BG} .

Μονάδες 8

- β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων \vec{AB} και \vec{AG} .

Μονάδες 8

- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)^2 - (y + 2)^2 = 0$.

- α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες με εξισώσεις $\epsilon_1: x + y + 1 = 0$ και $\epsilon_2: x - y - 3 = 0$.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μεταξύ τους κάθετες.

Μονάδες 8

γ) Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(2,2)$ ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Τα $B(0,4)$ και $\Gamma(2+2\sqrt{2}, 2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση του κύκλου C είναι:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0.$$

Μονάδες 8

β) Τα σημεία B και Γ είναι σημεία του κύκλου C και το τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

γ) Η ευθεία με εξίσωση $y = x + 4$ εφάπτεται στον κύκλο C στο σημείο B .

Μονάδες 8

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 26 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Δίνονται δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και υποθέτουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB .
 Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} .$$

Μονάδες 15

B. Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους (**B.1**, **B.2**, **B.3** και **B.4**) και, δίπλα ακριβώς, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, όπου $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$, παριστάνει πάντοτε ευθεία γραμμή του επιπέδου.

2. Για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

Αν $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

3. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy με αρχή O η εξίσωση $x^2 = 2py$ με $p \neq 0$ παριστάνει παραβολή, με κορυφή το σημείο O .

4. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(2\mu + 1, \lambda - 2)$, $\Gamma(4, 0)$ και $M(3, 2)$, όπου M είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B .

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα \vec{GM} και \vec{AB} είναι κάθετα.

Μονάδες 10

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $|\vec{GA}| = |\vec{GB}|$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 5, \quad (1)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

Μονάδες 10

β) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1).

Μονάδες 6

γ) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με εξίσωση $y = x$ και του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα επιβατηγό πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Πειραιάς- Ηράκλειο Κρήτης. Σε κάθε χρονική στιγμή t του ταξιδιού η θέση M του πλοίου ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι:

$M(2 + κt, λ + 2t)$, όπου $κ, λ ∈ ℝ$.
Τη χρονική στιγμή $t = 5$ το πλοίο διέρχεται από το σημείο $A(7, 13)$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $κ, λ$.

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι το πλοίο διαγράφει γραμμή που βρίσκεται πάνω στην ευθεία $(ε) : y = 2x - 1$.

Μονάδες 10

γ) Ένα δελφίνι κινείται παράλληλα προς το πλοίο. Να βρείτε ένα διάνυσμα μήκους 1 κάθετο προς την ευθεία πάνω στην οποία κινείται το δελφίνι.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 24 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** του

παρακάτω πίνακα και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της

Στήλης II, έτσι ώστε να προκύπτει η σωστή αντιστοίχιση. (Δύο στοιχεία της **Στήλης II** περισσεύουν).

Στήλη I Είδος κωνικής τομής	Στήλη II Εξίσωση γραμμής
α. Παραβολή	1. $x^2 + y^2 = \rho^2$
β. Κύκλος	2. $x + y = \alpha$, $\alpha \neq 0$
γ. Υπερβολή	3. $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, α , $\beta > 0$
δ. Έλλειψη	4. $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, α , $\beta > 0$
	5. $y^2 = 2px$, $p > 0$
	6. $x^3 = \beta y^2$, $\beta \neq 0$

Για κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις **Β.** και **Γ.**, να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη **(Σ)**, αν αυτή είναι **Σωστή** ή **(Λ)**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

Β. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, που σχηματίζουν γωνία θ , τότε ισχύει:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} .$$

Μονάδες 3

Γ. Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , τότε η εξίσωσή της είναι:

$$y = \lambda x + \beta, \text{ με } \beta \neq 0 .$$

Μονάδες 3

Δ. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$,

$$\vec{\beta} = (x_2, y_2) \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} =$$

(x_3, y_3) . Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \quad (\text{Επιμεριστική$$

ιδιότητα).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 , με εξισώσεις $\varepsilon_1: 3x - 2y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + 3y - 8 = 0$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε_1 είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 .

Μονάδες 5

β) Υποθέτουμε ότι το σημείο $A(\alpha, 2)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 και το σημείο $B(-5, \beta)$ ανήκει στην ευθεία ε_2 .

β₁) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

Μονάδες 6

β₂) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $3x - y + 3 = 0$.

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}|=3, \quad |\vec{\beta}|=2, \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους θετικούς αριθμούς x, y για

$$\text{τους οποίους ισχύει η σχέση } (\vec{\alpha} + x\vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = 17$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x - 2\lambda y = 0, \quad (1)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η γραμμή που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι, για τις διάφορες τιμές του λ , η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο

$$K(2, \lambda) \text{ και ακτίνα } \rho = \sqrt{\lambda^2 + 4}$$

Μονάδες 5

γ) Για $\lambda = 2$, να αποδείξετε ότι ο κύκλος, που ορίζεται από την εξίσωση (1), τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ σε σημεία A και B αντίστοιχα, διαφορετικά από την αρχή O , τέτοια ώστε το τρίγωνο OAB να είναι ισοσκελές.

Μονάδες 8

δ) Για $\lambda = 2$, να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -x$ εφάπτεται στον κύκλο, που ορίζεται από την εξίσωση (1), στο σημείο $O(0, 0)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο

και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.

4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
 Γ' ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. α) Να γράψετε την εξίσωση ενός κύκλου C ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ .

Μονάδες 7,5

β) Να γράψετε την εξίσωση ενός κύκλου C ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα ρ .

Μονάδες 5

B. Στη Στήλη **I** του επόμενου πίνακα δίνονται τα κέντρα και οι ακτίνες κάποιων κύκλων. Σε κάθε έναν από τους κύκλους αυτούς αντιστοιχεί μια μόνο εξίσωση από τη Στήλη **II**.

ΣΤΗΛΗ I	ΣΤΗΛΗ II
A. $K(1, 1), \rho=1$	1. $x^2 + (y-2)^2 = 2$
B. $K(2, 0), \rho = \sqrt{2}$	2. $x^2 + y^2 = 4$
Γ. $K(0, 2), \rho = \sqrt{2}$	3. $(x-2)^2 + y^2 = 2$
Δ. $O(0, 0), \rho=2$	4. $x^2 + y^2 = 2$
E. $K(-2, 1),$	5. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$
	6. $x + y = 1$
	7. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης του πίνακα και, ακριβώς δίπλα, τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση.

Μονάδες 12,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=4\vec{i} - 3\vec{j}$ και $\vec{\beta}=3\vec{i} + 4\vec{j}$.

α) Να υπολογίσετε τα μέτρα $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\beta}|$.

Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

Μονάδες 10

γ) Για την επόμενη ερώτηση να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της (2.γ) και, ακριβώς δίπλα, να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Α. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ίσα.

Β. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

Γ. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

Δ. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

Ε. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy , δίνονται τα σημεία $B(2,3)$ και $\Gamma(4,5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\Gamma M}$.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος

$$\vec{\alpha} = 2\vec{O\Gamma} + 3\vec{\Gamma M} .$$

Μονάδες 6

δ) Αν $\vec{\beta} = (10,14)$ να δείξετε ότι τα διανύσματα

$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά ($\vec{\alpha} // \vec{\beta}$).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Ο αριθμός των παιδιών που γεννήθηκαν σε μια χώρα κατά τα έτη 1998 και 1999 ήταν 110.000 και 90.000 αντίστοιχα. Ο αριθμός των αγοριών που γεννήθηκαν το 1998 ήταν 50.600. Το 48% των παιδιών που γεννήθηκαν το 1999 ήταν αγόρια.

α) Ποιο είναι το ποσοστό αγοριών που γεννήθηκαν το 1998;

Μονάδες 6

β) Ποιος είναι ο αριθμός των αγοριών που γεννήθηκαν το 1999;

Μονάδες 6

γ) Ποιο είναι το ποσοστό αγοριών που γεννήθηκαν κατά τη διετία 1998 - 1999;
Μονάδες 7

δ) Ποιος είναι ο δείκτης εξέλιξης (με προσέγγιση εκατοστού (στρογγυλοποιημένη)) των γεννήσεων αγοριών από το 1998 στο 1999;

Μονάδες 6

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. α. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;
Μονάδες 6,5

β. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Στη στήλη I του παρακάτω πίνακα αναφέρονται ορισμένες βασικές έννοιες διανυσμάτων. Κάθε μία αντιστοιχεί σε κάποια από τις σχέσεις που δίνονται στη στήλη II.

ΣΤΗΛΗ I	ΣΤΗΛΗ II
A. κάθετα διανύσματα	1. $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ και $ \vec{\alpha} = \vec{\beta} $
B. ίσα διανύσματα	2. $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $ \vec{\alpha} = \vec{\beta} $
Γ. αντίθετα διανύσματα	3. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
	4. $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$ με $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης και

ακριβώς δίπλα τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή σχέση.

Μονάδες 6

Β. α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ όταν $|\vec{\alpha}|=5$, $|\vec{\beta}|=2$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι $\theta=60^\circ$.

Μονάδες 6,5

β. Για την επόμενη ερώτηση να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της (**1.Β.β**) και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει ότι

$$|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=2 \text{ και } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}=1$$

ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή;

Α. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα.

Β. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

Γ. Η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ίση με 60° .

Δ. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ίσα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-4,3)$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο $|\vec{a}|$ του \vec{a} .
Μονάδες 12

β) Αν $\vec{\beta} = (\mu - 1, 2\lambda + 5)$ να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ώστε τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ να είναι ίσα.
Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται κύκλος με εξίσωση:

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9.$$

α) Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου.

Μονάδες 9

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία

$$M(3, 0), \quad N(0, -4), \quad P(3, -7), \\ \Sigma(1, 1)$$

είναι σημεία του κύκλου.

Μονάδες 9

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $O(0, 0)$ είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του κύκλου.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Η τιμή ενός προϊόντος στην αρχή του έτους ήταν 2.000 δρχ. Στο τέλος Ιανουαρίου η τιμή είχε διαμορφωθεί στις 2.400 δρχ, εντός του Φεβρουαρίου αυξήθηκε κατά 15%, ενώ το μήνα Μάρτιο

έγινε επιπλέον αύξηση στην τιμή του κατά 10%.

α) Ποιος ήταν ο δείκτης εξέλιξης της τιμής του προϊόντος για το μήνα Ιανουάριο;

Μονάδες 6

β) Ποια ήταν η τιμή του προϊόντος στο τέλος Φεβρουαρίου και ποιος ο δείκτης εξέλιξης της τιμής του για το μήνα Φεβρουάριο;

Μονάδες 7

γ) Ποιος ήταν ο δείκτης εξέλιξης της τιμής του προϊόντος για το μήνα Μάρτιο;

Μονάδες 6

δ) Ποιος ήταν ο δείκτης εξέλιξης της τιμής του προϊόντος για το πρώτο τρίμηνο του έτους (Ιανουάριος - Μάρτιος) και ποια η τιμή του προϊόντος στο τέλος του μηνός Μαρτίου;

Μονάδες 6