

Θέματα Μαθηματικών Θετικής Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου (Σεπτέμβριος 1999)

Θέμα1ο Α. Έστω Oxy ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο O και ακτίνα ρ έχει εξίσωση: $x^2 + y^2 = \rho^2$

Μονάδες 12,5

B. Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$ και $A(3,4)$

α) Το μήκος του (OA) είναι:

A. -5 B. $\sqrt{5}$ Γ. 5 Δ. 7 E. 1

Μονάδες 2,5

β) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C με κέντρο το σημείο O και ακτίνα $\rho = (OA)$.

Μονάδες 5

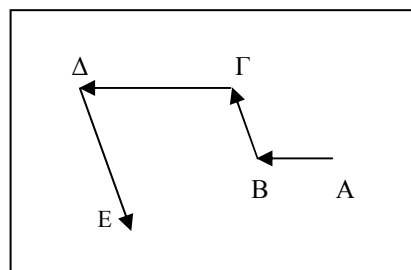
γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων στα οποία ο κύκλος C τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων

Μονάδες 5

Θέμα2ο Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος ισχύουν οι σχέσεις:

$$\overline{AB} = \vec{\alpha}, \overline{B\Gamma} = \vec{\beta}, \overline{\Gamma\Delta} = 2\vec{\alpha}, \overline{\Delta E} = -2\vec{\beta}$$

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overline{A\Gamma}$ και $\overline{\Gamma E}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$



Μονάδες 10

β) Το διάνυσμα $\overline{A\Gamma}$ είναι ίσο με :

A. $3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ B. $3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ Γ. $3\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ Δ. $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ E. $2\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$

Μονάδες 5

γ) Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ τότε να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overline{A\Gamma}$ και $\overline{\Gamma E}$ είναι μεταξύ τους κάθετα

Μονάδες 10

Θέμα3ο α) Αν ο ακέραιος αριθμός λ δεν διαιρείται με το 3 να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\lambda^2 + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

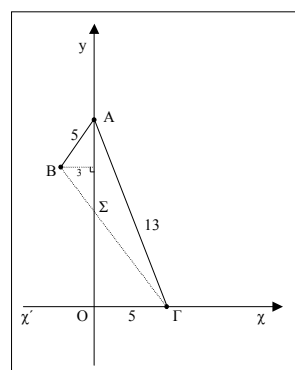
Μονάδες 15

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του ακεραίου αριθμού k ο ακέραιος $k(k^2 + 5)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Μονάδες 10

Θέμα4ο

Στο διπλανό σχεδιάγραμμα με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy τα σημεία A, B, Γ παριστάνουν τις θέσεις τριών κοινοτήτων ενός δήμου. Στο ίδιο σχεδιάγραμμα ο άξονας $y'y$ παριστάνει μια εθνική οδό και τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $A\Gamma$ δυο επαρχιακούς δρόμους



που συνδέουν την κοινότητα A με τις κοινότητες B και Γ και έχουν μήκη 5Km και 13 Km αντίστοιχα. Πρόκειται να κατασκευαστεί ένας επαρχιακός δρόμος ΒΓ που θα συνδέει τις κοινότητες B και Γ ο οποίος στο σχεδιάγραμμα παριστάνεται με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Αν οι αποστάσεις των κοινοτήτων B και Γ από την εθνική οδό είναι 3Km και 5Km αντίστοιχα τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B,Γ

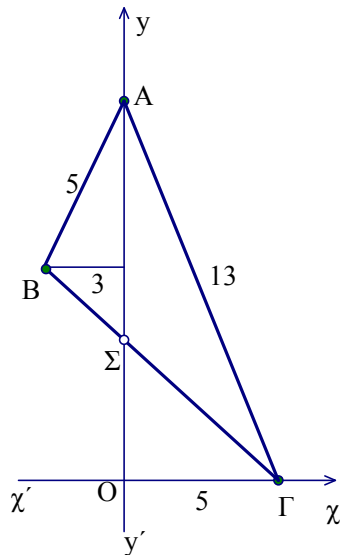
Μονάδες 8

β) Να βρείτε το μήκος του επαρχιακού δρόμου ΒΓ

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ και στη συνέχεια τις συντεταγμένες του σημείου Σ στο οποίο ο επαρχιακός δρόμος ΒΓ συναντά την εθνική οδό.

Μονάδες 9



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
 Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου, να γράψετε τις συντεταγμένες των παρακάτω διανυσμάτων:
 $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$, με λ, μ πραγματικούς αριθμούς.

Μονάδες 3

A.2. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και (x, y) οι συντεταγμένες του μέσου M του AB , να αποδείξετε ότι:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Μονάδες 6,5

A.3. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν τις συντεταγμένες του διανύσματος \overline{AB} και την απόσταση (AB) των σημείων A και B .

Μονάδες 3

Β.1. Στη **Στήλη Α** δίνονται οι συντεταγμένες δύο σημείων του καρτεσιανού επιπέδου και στη **Στήλη Β** οι συντεταγμένες του διανύσματος \overline{AB} και η απόσταση (AB) των σημείων A και B . Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $A(1, 3)$ και $B(-2, 5)$	1. $\overline{AB} = (-3, 2)$ και $(AB) = \sqrt{15}$
β. $A(2, -1)$ και $B(2, -3)$	2. $\overline{AB} = (0, -2)$ και $(AB) = 2$
γ. $A(4, -3)$ και $B(6, -3)$	3. $\overline{AB} = (2, 0)$ και $(AB) = \sqrt{13}$
	4. $\overline{AB} = (-3, 2)$ και $(AB) = 2$

Μονάδες 6

Β.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $K(x_1, 6)$ και $\Lambda(-9, y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και $(-5, 4)$ οι συντεταγμένες του μέσου M του $K\Lambda$, τότε:

Α: $x_1 = 1$ και $y_2 = -2$ Β: $x_1 = -1$ και $y_2 = 2$

Γ: $x_1 = -3$ και $y_2 = 2$ Δ: $x_1 = 4$ και $y_2 = 5$

Ε: κανένα από τα προηγούμενα

Μονάδες
6,5

ΘΕΜΑ 2ο

Αν α είναι ένας άρτιος ακέραιος αριθμός,
να αποδείξετε ότι:

α. $(\alpha+1)^2 - 1 = 4\lambda$, όπου λ ακέραιος
αριθμός.

Μονάδες 10

β.
$$\frac{\alpha^2 + (\alpha+1)^2 + (\alpha+3)^2 - 2\alpha + 2}{4} = 3\mu, \quad \text{όπου } \mu$$
 ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το σημείο $A(2,1)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA .

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία OA .

Μονάδες 7

γ. Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου OAB που διέρχεται από την κορυφή A .

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

α. Δίνεται η εξίσωση $(x-1)(x-3) + (y-3)(y-5) = 0$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Μονάδες 8

β. Σε τοπογραφικό σχεδιάγραμμα, με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy τα σημεία $A(1,3)$, $B(3,3)$, $\Gamma(3,5)$ και

$\Delta(1,5)$ παριστάνουν τις θέσεις τεσσάρων δήμων. Να αποδείξετε ότι μπορεί να χαραχθεί περιφερειακός κυκλικός δρόμος που να διέρχεται από τους τέσσερις δήμους.

Μονάδες 7

γ. Αν θεωρήσουμε ότι στο ίδιο σύστημα αξόνων του ερωτήματος **β**, οι συντεταγμένες ενός αυτοκινήτου K για κάθε χρονική στιγμή t ($t > 0$) είναι $(t, t+2)$, να βρείτε αν η γραμμή, στην οποία κινείται το αυτοκίνητο K , συναντά τον κυκλικό περιφερειακό δρόμο και αν ναι, σε ποια σημεία;

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΑΡΧΗ ΘΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Β' ΤΑΞΗ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ ΘΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
 Β' ΤΑΞΗΣ
 ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΤΕΤΑΡΤΗ 11 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
 ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$, όπου $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ και κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.

Μονάδες 8,5

A.2. Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισοδυναμίες:

α) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \dots$

β) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \dots$

Μονάδες 4

B.1. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $\varepsilon: 2x+3y-8=0$

και το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2\lambda - 1, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε το λ , όταν:

α) η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$

β) η ευθεία ε είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 4

Β.2. Στη **Στήλη Α** δίνονται οι εξισώσεις ευθειών και στη **Στήλη Β** τα κάθετα σ' αυτές διανύσματα.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $y=3x-5$	1. $(-2, 7)$
β. $y=-7$	2. $(3, -1)$
γ. $x=1$	3. $(1, 3)$
	4. $(4, 0)$
	5. $(0, -3)$

Μονάδες 4, 5

Β.3. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x+2y+3=0$ και $\varepsilon_2: 3x-2y+1=0$.

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, όταν:

α) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

β) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί $\beta=3\alpha+4$ και $\gamma=4\alpha+5$, όπου α ακέραιος αριθμός. Να δείξετε ότι:

α) οι αριθμοί β, γ έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα

Μονάδες 8

β) ο αριθμός $\beta\gamma - (\beta+\gamma)$ είναι περιττός

Μονάδες 8

γ) αν για τους $\beta=3\alpha+4$ και $\gamma=4\alpha+5$ ισχύει επιπλέον $\alpha=3\kappa$, όπου κ ακέραιος, τότε ο αριθμός $\gamma^2 - \beta^2$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Β΄ ΤΑΞΗ

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2=25$ και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι εφαπτόμενες του κύκλου από το σημείο $M(0, -10)$. Αν A και B είναι τα σημεία επαφής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με τον κύκλο, να βρείτε:

- α)** τις εξισώσεις των εφαπτομένων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
Μονάδες 10
- β)** τις συντεταγμένες των σημείων επαφής A και B
Μονάδες 8
- γ)** την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία A και B .
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Αν $\vec{PA} + \vec{PB} - 2\vec{PG} = \vec{0}$ και $|\vec{PA}| = 6, |\vec{PB}| = |\vec{PG}| = 2\sqrt{3}$

να δείξετε ότι:

- α.** τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά
Μονάδες 6
- β.** το σημείο Γ είναι ανάμεσα στα σημεία A, B
Μονάδες 4
- γ.** η γωνία $\hat{APB} = 90^\circ$
Μονάδες 7
- δ.** το διάνυσμα $\vec{V} = \vec{PB} + \vec{PG}$ είναι κάθετο στο \vec{AG} .
Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
 Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
 ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ , να αποδείξετε ότι:

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Μονάδες 6,5

A.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης A και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη A	Στήλη B
α. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq 0, \vec{\beta} \neq 0$	1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} $
β. $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq 0, \vec{\beta} \neq 0$	2. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} $
γ. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ αντίρροπα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq 0, \vec{\beta} \neq 0$	3. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
	4. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} $

Μονάδες 6

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, \lambda)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Β.1. Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα, τότε:

α. $\lambda=1$ **β.** $\lambda=0$ **γ.** $\lambda=-2$ **δ.** $\lambda=2$
Μονάδες 4

Β.2. Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, τότε:

α. $\lambda=1$ **β.** $\lambda=0$ **γ.** $\lambda=-2$ **δ.** $\lambda=2$
Μονάδες 4, 5

Β.3. Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα, τότε:

α. $\lambda=-1$ **β.** $\lambda=0$ **γ.** $\lambda=-2$ **δ.** $\lambda=2$
Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$, η πλευρά $ΑΒ$ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $3x-7y+27=0$ και η πλευρά $ΑΔ$ στην ευθεία με εξίσωση $4x+y+5=0$. Οι διαγώνιοι $ΑΓ$, $ΒΔ$ του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $K(2, \frac{5}{2})$.

α. Να αποδείξετε ότι η κορυφή $Γ$ έχει συντεταγμένες $(6, 2)$.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 6

γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διαγώνιος ΒΔ.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει:

α. $3^{3n} + 51 = \text{πολ } 26$

Μονάδες 15

β. $3^{3n} - 1 = \text{πολ } 26$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = ax$ διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(2, 0)$.

Μονάδες 5

β. Έστω E' το συμμετρικό της εστίας E ως προς τον άξονα $y'y$. Αν $M(x, y)$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο για το οποίο ισχύει

$$\vec{ME}^2 = \vec{ME} \cdot \vec{E'E}, \text{ να αποδείξετε ότι το σημείο}$$

$M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ και ακτίνα 2.

Μονάδες 10

- γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
B' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να δείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Μονάδες 9

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$,

με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

β. Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

γ. Η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 2py$ έχει την εστία της πάνω στον άξονα $x'x$.

δ. Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί k και ν , τέτοιοι ώστε $\alpha = k\beta + \nu$, $0 \leq \nu < \beta$.

Μονάδες 8

Γ. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες.

α. Ο κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

β. Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου

$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$, έχει εστίες τα σημεία E και E' με συντεταγμένες και

γ. Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις και

δ. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$ έχει διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = k-1$ και $\beta = 5k+6$, όπου k ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

α. Εάν ο α είναι άρτιος, τότε ο β είναι περιττός.

Μονάδες 7

β. Ο αριθμός $3\beta-4\alpha$ είναι πολλαπλάσιος του 11.

Μονάδες 8

γ. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών $5\alpha+3$ και $\beta-9$ είναι ίσος με 1.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$ και $B(5,3)$.

α. Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος \vec{AB} είναι ίσος με $\frac{1}{2}$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AB είναι η ευθεία $\varepsilon: y = -2x+8$.

Μονάδες 8

γ. Έστω M το μέσο του τμήματος AB και Γ, Δ τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την ευθεία AB και την μεσοκάθετο ε αντίστοιχα. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία M, Γ και Δ .

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-1)x+2\lambda y-\lambda^2-2\lambda-\gamma = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και γ πραγματική σταθερά.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.

Μονάδες 5

β. Εάν $\gamma = -1$, να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 10

γ. Εάν $\gamma \neq -1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μία ευθεία η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Β' ΤΑΞΗ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
 Β' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΤΡΙΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2003
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

Μονάδες 9

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους), τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.

Μονάδες 2

β. Έστω α, β μη μηδενικοί ακέραιοι. Αν $\alpha | \beta$ και $\beta | \alpha$, τότε ισχύει πάντα ότι $\alpha = \beta$.

Μονάδες 2

γ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

Μονάδες 2

δ. Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $\delta : x = -\frac{p}{2}$ είναι $x^2 = 2py$.

Μονάδες 2

Γ. Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** ονομασίες γραμμών του επιπέδου.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > \beta > 0$	1. Κύκλος
β. $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > 0, \beta > 0$	2. Ευθεία
γ. $y^2 = 2px$, $p > 0$	3. Υπερβολή
δ. $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\rho > 0$	4. Παραβολή
	5. Έλλειψη

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία $A(14, 5)$ και $B(2, -1)$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι $x - 2y - 4 = 0$.

Μονάδες 13

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία $K(4, 0)$ και $\Lambda(0, -2)$ αντιστοίχως.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης των ακεραίων αριθμών α και β με το 5 είναι 2, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha^2 + \beta^2 - 2003$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $8\alpha + 9\beta$ με το 5.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ και το σημείο $M(2, 1)$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(2, -1)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $M(2, 1)$.

Μονάδες 10

γ. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου MAB .

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μετά τη 10η πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω α, β, γ ακέραιοι με $\alpha, \beta \neq 0$. Να δείξετε ότι:

α. Αν α / β και β / γ , τότε α / γ .

Μονάδες 6

β. Αν α / β , τότε $|\vec{\alpha}| \leq |\vec{\beta}|$.

Μονάδες 6

B. Έστω δύο σημεία E και E' ενός επιπέδου. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E και E' στο συγκεκριμένο επίπεδο;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν A, B σημεία του επιπέδου και M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB , τότε για οποιοδήποτε σημείο O του επιπέδου

ισχύει
$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

β. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$.

γ. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$, για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

δ. Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί k και ν τέτοιοι, ώστε $\alpha = k\beta + \nu$, $0 \leq \nu < \beta$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(3, -2)$.

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$, ώστε τα σημεία A, M, B να είναι συνευθειακά.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Το σημείο $A(7, 5)$ είναι μία κορυφή τετραγώνου του οποίου η μία διαγώνιος βρίσκεται στην ευθεία $3x + y - 6 = 0$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του τετραγώνου.

Μονάδες 8

β. Να δείξετε ότι το κέντρο του τετραγώνου είναι το σημείο $K(1, 3)$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του παραπάνω τετραγώνου.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=9$.

α. Αν το σημείο $P(x_0, y_0)$ ανήκει στον παραπάνω κύκλο, να δείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{5}{3}x_0, \frac{4}{3}y_0\right)$ ανήκει σε έλλειψη της οποίας να υπολογίσετε την εκκεντρότητα.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την παραπάνω έλλειψη.

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής του ερωτήματος β καθώς και τη γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας

παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μετά τη 10η πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
 Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 1999
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. α) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δυο μη μηδενικά διανύσματα και θ είναι η γωνία που σχηματίζουν, τότε για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων και ισχύει πάντοτε:

A. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \theta$

B. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \sin \theta$

Γ. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \tan \theta$

Δ. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

Ε. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

Μονάδες 5

β) Να δείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$ και $\vec{b} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}$ είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους, δηλαδή $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Μονάδες 7,5

B. α) Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} για τα οποία ισχύουν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\theta = 45^\circ$. Τότε, το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$ είναι:

A. 0

B. -6

Γ. 6

Δ. $3\sqrt{3}$

Ε. $-3\sqrt{6}$

Μονάδες 6,5

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{x}=(3,4)$ και $\vec{y}=(-1,2)$.
Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{x} \cdot \vec{y}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2k)$, $B(k-1, 2+k)$ και $\Gamma(k, k+3)$, όπου k πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{B\Gamma}$

Μονάδες 9

β) Για ποια από τις παρακάτω τιμές του k τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά ;

A. -1

B. 0

Γ. 1

Δ. 2

Ε. -2

Μονάδες 9

γ) Να αποδείξετε ότι για $k = 1$ το σημείο B είναι το μέσο του τμήματος $A\Gamma$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Μια ταράτσα πολυκατοικίας έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις x και y , για τις οποίες ισχύει $20m \leq x \leq 20,5m$ και $15m \leq y \leq 16m$.

α) Να βρείτε προσεγγιστικές τιμές με έλλειψη και υπέρβαση για το εμβαδόν της ταράτσας.

Μονάδες 16

β) Πρόκειται να γίνει μόνωση της ταράτσας, η οποία κοστίζει 25.000 δραχμές το τετραγωνικό μέτρο. Να βρείτε προσεγγιστικές τιμές με έλλειψη και υπέρβαση για το κόστος της μόνωσης.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Ο προϋπολογισμός μιας σήραγγας εκτιμήθηκε ότι είναι 3.200.000.000 δραχμές. Για την κατασκευή της σήραγγας ενδιαφέρθηκαν τρεις εταιρείες Α, Β, Γ οι οποίες συμμετείχαν στο διαγωνισμό ως εξής:

Η εταιρεία Α προσέφερε ένα ποσοστό έκπτωσης επί του προϋπολογισμού, εκτιμώντας ότι για να κατασκευάσει το έργο θα δαπανήσει 2.400.000.000 δραχμές και επιδιώκοντας να έχει κέρδος 400.000.000 δραχμές.

Η εταιρεία Β, εκτιμώντας ότι το έργο θα της κοστίσει 2.400.000.000 δραχμές, προσέφερε έκπτωση 10% επί του ποσού του προϋπολογισμού.

Η εταιρεία Γ, προσδοκώντας να κερδίσει 450.000.000 δραχμές, προσέφερε έκπτωση 11% επί του ποσού του προϋπολογισμού.

Να βρείτε :

α) Το ποσό της έκπτωσης που προσέφερε η εταιρεία Α και να εκφρασθεί αυτό σε ποσοστό (επί τοις εκατό) στο ποσό του προϋπολογισμού

Μονάδες 9

β) Το κέρδος που προσδοκά ότι θα έχει η εταιρεία Β.

Μονάδες 8

γ) Το κόστος κατασκευής που εκτίμησε η εταιρεία Γ, όταν διαμόρφωσε την προσφορά της.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 19 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν σ_α είναι η ακρίβεια της προσέγγισης $x \cong \alpha$ και σ_β η ακρίβεια της προσέγγισης $y \cong \beta$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η ακρίβεια της προσέγγισης του $x-y$ από τη διαφορά $\alpha-\beta$, δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma_{\alpha-\beta} = \sigma_\alpha + \sigma_\beta$$

Μονάδες 8

β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Για το άνω φράγμα του σχετικού σφάλματος της προσέγγισης του $x-y$ από το $\alpha-\beta$ με $\alpha \neq \beta$, ισχύει:

$$A: \varepsilon_{\alpha-\beta} = \frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{|\alpha - \beta|}, \quad B: \varepsilon_{\alpha-\beta} =$$

$$\frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{\alpha - \beta}$$

$$\Gamma: \varepsilon_{\alpha-\beta} = \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{|\alpha - \beta|}, \quad \Delta: \varepsilon_{\alpha-\beta} =$$

$$\frac{\sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha}}{|\alpha - \beta|},$$

$$E: \varepsilon_{\alpha-\beta} = \frac{\sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha}}{\alpha + \beta}$$

Μονάδες 4,5

B.1. Θεωρούμε τις προσεγγίσεις $x \approx 15,35$ και $y \approx 5,25$.

Να βρείτε:

α. την ακρίβεια της προσέγγισης της διαφοράς $x-y$

Μονάδες 4

β. το άνω φράγμα του σχετικού σφάλματος της προσέγγισης της διαφοράς $x-y$.

Μονάδες 4

B.2. Θεωρούμε τις προσεγγίσεις $x = 26,343 \pm 0,001$ και $y = 14,24 \pm 0,001$.

Να βρείτε την προσέγγιση της διαφοράς $x-y$

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2ο

Η τιμή πώλησης ενός υφάσματος κατά το μήνα Οκτώβριο ήταν α_0 δρχ. Τους μήνες Νοέμβριο και Δεκέμβριο, στην τιμή του υφάσματος έγιναν διαδοχικές αυξήσεις 5% και 10% αντίστοιχα. Τον Ιανουάριο όμως

έγινε έκπτωση στην τιμή του 20% και επωλείτο 18.480 δραχμές.

A. Να βρείτε την τιμή πώλησης του υφάσματος:

α. κατά το μήνα Οκτώβριο

Μονάδες 7

β. κατά τους μήνες Νοέμβριο και Δεκέμβριο.

Μονάδες 8

B. Πόσο τοις εκατό πρέπει να αυξηθεί η τιμή του προϊόντος το Φεβρουάριο για να πωλείται όσο επωλείτο το Δεκέμβριο;

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε την εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + 2a = 0$, όπου a πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό a .

Μονάδες 7

β. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a έτσι, ώστε η ακτίνα του κύκλου αυτού να είναι ίση με 2.

Μονάδες 6

γ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a έτσι, ώστε το κέντρο του κύκλου να βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $\varepsilon: 5x + 3y + 1 = 0$.

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a έτσι, ώστε ο κύκλος να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Για την τελετή λήξης της Ολυμπιάδας του Σίδνεϋ προτάθηκε να παραταχθούν οι αθλητές κάθε χώρας σε ευθείες που όλες θα διέρχονται από το σημείο στο οποίο θα σταθεί ο σημαιοφόρος της ελληνικής ομάδας. Για να γνωρίζουν οι αθλητές τις θέσεις τους, έγινε μια τοποθέτησή τους σε χάρτη, σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στην οποία η διανυσματική εξίσωση της ευθείας της ελληνικής ομάδας είναι: $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + \lambda(3\vec{i} + \vec{j})$, όπου λ πραγματικός αριθμός, ενώ η εξίσωση της τελευταίας από τις 199 ομάδες που είναι η ομάδα της Αυστραλίας είναι:

$\vec{r}_{199} = 6\vec{j} + \mu(-\vec{i} + \vec{j})$, όπου μ πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου που θα σταθεί ο σηματοφόρος της ελληνικής ομάδας.

Μονάδες 10

β. Να εξετάσετε αν το σημείο $A(2,3)$ μπορεί να είναι η θέση κάποιου αθλητή της ελληνικής ομάδας.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε την απόσταση του παραπάνω σημείου A από την ευθεία της ομάδας της Αυστραλίας.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΡΧΗ ΘΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Β' ΤΑΞΗ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ ΘΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ