Θέμα 27ο

Α. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ, όταν $A(-4,-5)$ και τα δύο ύψη του έχουν εξισώσεις $y=-x+1$ και $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$.

Β. Δίνεται η παραβολή $C: y^2=12x$ και το σημείο $A(4,2)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε που περνάει από το Α και τέμνει τη C στα Β, Γ έτσι ώστε το Α να είναι μέσο του ΒΓ.

Θέμα 28ο

Α. Βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ αν $A(1,2)$ και οι εξισώσεις του ύψους και της διαμέσου που φέρνουμε από την ίδια κορυφή, είναι αντίστοιχα $y=2x+4$ και $y=-x+1$.

Β. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2\lambda x+(\lambda-1)y+3\kappa+2=0$, $\varepsilon_2: (1-2\lambda)x-(\lambda+2)y+\lambda=0$. Να βρεθούν οι $\kappa,\lambda\in R$ ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2

α. Να τέμνονται **β.** Να είναι παράλληλες.

Θέμα 29ο

Α. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που περνάει από το $A(3,0)$ και η οποία τέμνει τις ευθείες με εξισώσεις $y=2x-2$ και $y=-x-3$ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, έτσι ώστε το Α να είναι μέσον του ΒΓ.

Β. Έστω παραβολή $C_1: y^2=2px$. Να βρεθεί ο τύπος που δίνει την απόσταση τυχαίου σημείου Μ της παραβολής από τη εστία Ε. Κατόπιν να αποδειχθεί ότι, ο κύκλος με διάμετρο τυχαία χορδή ΑΒ της παραβολής, που διέρχεται από την εστία, εφάπτεται της διευθετούσας.

Θέμα 30ο

Α. Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, τέμνουν την ευθεία $(\varepsilon): y=\alpha$ στα σημεία Α και Β, αντίστοιχα. Οι κάθετες στις (ε_1) και (ε_2) στα Α και Β αντίστοιχα τέμνονται στο Γ. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του Γ είναι $\left(\frac{\alpha(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}, \frac{\alpha(\lambda_1\lambda_2-1)}{\lambda_1\lambda_2}\right)$.

Β. Έστω τρίγωνο ΑΟΒ ορθογώνιο (κορυφής Ο) και ισοσκελές. Αν το ΑΟΒ είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $C: y^2=2x$, να βρεθούν οι συντεταγμένες των Α και Β.

Θέμα 31ο

Α. Οι δύο πλευρές ενός παραλληλογράμμου έχουν εξισώσεις: $y = 2x + 5$ και $y = \frac{1}{2}x + 2$. Το δε σημείο τομής των διαγωνίων του έχει συντεταγμένες $(1,4)$. Να βρείτε:

α. Τις εξισώσεις των άλλων πλευρών και των διαγωνίων.

β. Τις εξισώσεις των υψών του.

Β. Έστω $C: y^2 = 2px$ και $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ σημεία της. Να αποδειχθεί ότι η ΑΒ περνά από την εστία Ε της C αν και μόνο αν ισχύει $y_1 y_2 = -p^2$. Κατόπιν να υπολογισθεί το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$.

Θέμα 32ο

Α. Οι συντεταγμένες των σημείων $A(\alpha, 2)$, $B(\beta, 3)$ και $\Gamma(\gamma, 1)$ με την σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Να τοποθετήσετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερό τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ΑΒ, ΓΒ και ΑΓ.

Β. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τον περιγεγραμμένο κύκλο του με κέντρο Ο και ακτίνα R. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 2A + \sigma\upsilon\nu 2B + \sigma\upsilon\nu 2\Gamma \geq -\frac{3}{2}$.

Θέμα 33ο

Α. Θεωρούμε τα σημεία $B(\alpha, \beta)$ και $\Gamma(\gamma, \beta)$ με α, β, γ ακέραιους και $\gamma > \alpha$. Αν $A(\kappa, \lambda)$ είναι σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, τέτοιο ώστε $|\vec{AB}| = |\vec{B\Gamma}| = |\vec{\Gamma A}|$, να αποδείξετε ότι οι κ και λ δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα ακέραιοι.

Β. Έστω η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ σημεία της για τα οποία ισχύει $y_1 + y_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Να δειχθεί ότι η ΑΒ σχηματίζει σταθερή γωνία με τον $x'x$ και να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της ΑΒ.

Θέμα 34ο

Α. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in R$ τις σχετικές θέσεις των ευθειών:

$$\varepsilon_1 : x + y = 1,\ \varepsilon_2 : x + y = \kappa,\ \varepsilon_3 : \kappa x + y = 1.$$

Β. Στην έλλειψη $x^2 + 5y^2 = 20$, να βρείτε σημεία της Μ τέτοια ώστε: $ME' \perp ME$ όπου Ε και Ε΄ είναι οι εστίες της έλλειψης.

Θέμα 35ο

Α. Για ποια τιμή του $\kappa \in R$ οι ευθείες: $\varepsilon_1 : \kappa x + y + 1 = 0$, $\varepsilon_2 : x + \kappa y + 1 = 0$, $\varepsilon_3 : x + y + \kappa = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

i. Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών: $\varepsilon_1 : \lambda x-(\lambda+1)y-1=0$ και $\varepsilon_2 : x-2y+\lambda-2=0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.

ii. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της Α κινείται σε σταθερή ευθεία.

B. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\lambda x^2-\lambda y^2+(1-\lambda^2)xy-(\lambda+1)x+(\lambda-1)y+1=0$ παριστάνει δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες ,για κάθε $\lambda \in R$.

Θέμα 36ο

Α. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in R$ για τις οποίες οι ευθείες: $\varepsilon_1 : x+\mu y+1=0$ και $\varepsilon_2 : 2\mu x+2y+\lambda=0$ είναι παράλληλες και η απόστασή τους είναι ίση με $2\sqrt{2}$.

B. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ που έχει κορυφές τις ευθείες της έλλειψης $c : \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ και έχει εστίες τις κορυφές της έλλειψης.

Θέμα 37ο

Α. Δίνονται τα σημεία $A(4,2)$ και $B(3,-5)$ και η ευθεία $\varepsilon : 7x+y-23=0$. Να βρεθεί σημείο Μ της ε ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

B. Έστω $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=5$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{\delta}=5\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ να υπολογιστεί το $|\vec{\delta}|$.

Θέμα 38ο

Α. Οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\eta\mu\alpha)x-(\sigma\upsilon\nu\alpha)y+1=0$, $\varepsilon_2 : (\sigma\upsilon\nu\alpha)x+(\eta\mu\alpha)y-1=0$, $\varepsilon_3 : x+y=\sqrt{2}$ και $\varepsilon_4 : 2\kappa x+\lambda y=\kappa\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha,\ \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. Να βρεθεί ποιά γραμμή διαγράφει το σημείο (κ, λ), όπου ταν $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

B. Δίνεται η παραβολή $C : y^2=4x$ και η ευθεία $\varepsilon : 4x-3y-6=0$. Να βρεθεί το σημείο της παραβολής που έχει τη μικρότερη απόσταση από την ευθεία.

Θέμα 39ο

Α. Δίνονται οι ημιευθείες $y=\lambda x$ και $y=-\lambda x$ με $0<\lambda<1$ και $x>0$ και η ευθεία (ε) τις τέμνει στο σημείο Α και Β. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των Α και Β συναρτήσει των συντεταγμένων (x, y) του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

Β. Αν η ευθεία (ε) κινείται έτσι ώστε να ισχύει : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1-\lambda^2$, να δείξετε ότι το σημείο Μ γράφει τον κλάδο μιας υπερβολής.

Θέμα 40ο

Κάθε χρονική στιγμή $t\geq 0$ δύο πλοία Π_1, Π_2 βρίσκονται στις θέσεις $\Pi_1(t,\ t+4)$ και $\Pi_2(1-2t,\ t+1)$ αντίστοιχα.

α. Υπάρχει περίπτωση τα πλοία να συγκρουσθούν;

β. Να βρεθεί η εξίσωση της πορείας κάθε πλοίου.

γ. Να βρεθεί η απόσταση των πλοίων την στιγμή που ξεκίνησαν και την χρονική στιγμή $t=2$.

δ. Οι πορείες των πλοίων συναντώνται;

Θέμα 41ο

Α. Δίδονται τα σημεία $A(3,\ 2)$, $B(-1,\ 1)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου ώστε $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

Β. Να βρεθεί η αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες: $2x^2-7xy+3y^2=0$.

Θέμα 42ο

Α. Δίδονται τα σημεία $A(3,\ 4)$ και $B(5,\ -2)$. Βρείτε σημείο ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με εμβαδόν 10 τμ.

Β. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,\ 2)$. Αν οι ευθείες $(\varepsilon_1): x-y-2=0$ και $(\varepsilon_2): 3x+y+5=0$, είναι οι μεσοκάθετες των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να βρεθούν οι κορυφές Β και Γ.

Θέμα 43ο

Α. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): \lambda x+(\lambda-1)y-\lambda=0$ και $(\varepsilon_2): \lambda x+\lambda y-\lambda-1=0$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής τους.

Β. i. Να βρεθεί $\mu\in R$ τέτοιο ώστε οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): (\mu+3)x-\mu y+\mu-3=0$ και $(\varepsilon_2): (\mu+2)x+(3\mu+4)y-7\mu-10=0,\ \mu\in R$ να είναι κάθετο.

ii. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 διέρχονται από το ίδιο σταθερό σημείο.

Θέμα 44ο

Ένα εκπαιδευόμενος πιλότος Α κινείται με το αεροσκάφος του σε τροχιά ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς ώστε κάθε χρονική στιγμή η θέση του να δίνεται από το σημείο $M(\lambda^2, 2\lambda)$, $\lambda\in R$

Α. i. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του.

ii. Ένας άλλος πιλότος Β κινείται στην ίδια τροχιά έτσι ώστε το άθροισμα των τεταγμένων των θέσεων του Α και του Β να είναι ίσο με $4\sqrt{3}$. Να δειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τις θέσεις τους κάθε χρονική στιγμή σχηματίζει σταθερή γωνία με τον άξονα xx΄.

Β. i. Ο εκπαιδευτής τους κινείται έτσι ώστε να βρίσκεται στην ίδια ευθεία με τους δύο πιλότους Α και Β και σε ίση απόσταση από αυτούς. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του.

ii. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τεταγμένη του αεροσκάφους του πιλότου Α είναι 2, ο πιλότος εκτοξεύει ρουκέτα, με σκοπό να πλήξει στόχο με συντεταγμένες $\Sigma(-1, 0)$. Αν θεωρηθεί ότι η τροχιά της ρουκέτας είναι ευθεία εφαπτόμενη στην τροχιά του αεροσκάφους εκείνη την χρονική στιγμή, να ελεγθεί αν ο πιλότος θα πλήξει το στόχο.

Θέμα 45ο

Α. Έστω Α, Β σημεία της παραβολής $C: y^2 = 2px$ με $A \neq B$ και $M(x_0, y_0)$ το μέσον του ΑΒ με $y_0 \neq 0$. Να δειχθεί ότι η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή κατεύθυνσης ίσο με $\frac{p}{y_0}$.

Β. Να βρεθεί η σχετική θέση των ευθειών :

$\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 2)y = \lambda + 1$ και $\varepsilon_2 : (\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.

Θέμα 46ο

Α. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $(\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο $K(x_1, y_1)$. Να δειχθεί ότι οι ευθείες :

$\lambda(A_1x + B_1y + \Gamma_1) + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0$, με $\lambda, \mu \in R^*$ διέρχονται από το σημείο Κ.

Β. Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις $C_1 : \frac{x^2 συν}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2 : \frac{x^2}{\alpha^2 + \lambda^2} + \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda^2} = 1$, $\alpha > \beta$ έχουν τις ίδιες εστίες για κάθε $\lambda \in R$.

Θέμα 47ο

Αν $\varepsilon : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ και $M(x_1, y_1)$ τυχαίο σημείο του επιπέδου με $M'(x_2, y_2)$ το συμμετρικό του Μ ως προς την ευθεία ε να αποδειχθούν :

i . $\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) + 2\gamma = 0$ **ii .** $\beta(x_1 - x_2) - \alpha(y_1 - y_2) = 0$

Θέμα 48ο

Α. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda\beta x - \alpha y = \lambda\alpha\beta$ και $\varepsilon_2 : \beta x + \lambda\alpha y = \alpha\beta$, όπου $\lambda \neq 0$ και τα σημεία $K\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta}, 0\right)$, $\Lambda\left(-\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0\right)$, όπου $0 < \beta < \alpha$. Να δειχθεί ότι για το σημείο τομής Μ των ε_1, ε_2 ισχύει $(MK) + (M\Lambda) = 2\alpha$ για κάθε $\lambda \in R^*$.

Β. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και το σημείο $M(x_0, y_0)$ που έχει μέσον το σημείο Μ. Κατόπιν να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ αν η χορδή έχει σταθερό συντελεστή διεύθυνσης λ.

Θέμα 49ο

Έστω α, β ακέραιοι τέτοιοι ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = (2, 1 - \beta)$ και είναι κάθετα.

Να αποδείξετε ότι:

α. Ο ακέραιος β είναι περιττός.

β. Αν $\delta \in Z_+^*$ και τέτοιος ώστε να ισχύουν: $\delta / 1 - \alpha\nu$ και $\delta / \nu\beta + 2$ με $\nu \in N^*$ να δείξετε ότι $\delta = 1$

(**Απ.:** $\beta = 2\alpha + 1$)

Θέμα 50ο

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : |\vec{\alpha}|^2 x + |\vec{\beta}|^2 y = 6\vec{\alpha}\vec{\beta}$. Αν σχηματίζει με τους άξονες του ορθοκανονικού συστήματος τρίγωνο με εμβαδόν 18, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

Θέμα 51ο

Να βρείτε σημεία της ευθείας $x - y + 4 = 0$, με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία να απέχουν από την ευθεία $3x - 4y + 14 = 0$ απόσταση που είναι αριθμός ακέραιος.

(**Απ.:** $M(5\kappa - 1, \quad 5\kappa + 3), \quad \kappa \in Z$)

Θέμα 52ο

Δίνεται το κλάσμα $\dfrac{4\nu + 9}{3\nu + 5}$ με ν θετικό ακέραιο. Δείξτε ότι οι τιμές του ν για τις οποίες το κλάσμα απλοποιείται είναι τεταγμένες σημείων της ευθείας με εξίσωση $7x - y - 4 = 0$.

(**Απ.:** $\nu = 7\lambda - 4, \quad \lambda \in N^*$)

Θέμα 53ο

Αν (k, λ) είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(4,5)$ και $B(2003,2004)$ με $k, \lambda \in Z$, τότε ο αριθμός $k \cdot \lambda$ είναι άρτιος.

Θέμα 54ο

Δίνονται τα παράλληλα διανύσματα $\vec{u} = (\mu, \nu)$ και $\vec{\upsilon} = (\kappa, \lambda)$, με κ, λ, μ, ν θετικούς ακεραίους. Να αποδείξετε οτι ο αριθμός $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ είναι ακέραιος.