Θέμα 1ο

Α. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα και ισχύει $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=1$, τότε να δείξετε ότι:

i. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\leq\frac{1}{4}$ και **ii.** Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ τότε ισχύει $\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2=\frac{1}{4}$.

Β. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η εξίσωση $(\lambda^2+\lambda-2)x+(\lambda^2-4)y+\lambda(\lambda+2)=0$

i. Να παριστάνει ευθεία
ii. Να είναι παράλληλη στη $x'x$
iii. Να είναι παράλληλη στον $y'y$
iv. Να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Θέμα 2ο

Α. Αν $\vec{\beta}\neq 0$ και $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$ με $\vec{\alpha}_1 // \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}_2\perp\vec{\beta}$ αποδείξτε ότι

$$\vec{\alpha}_1=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}_2=\vec{\alpha}-\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}\vec{\beta}.$$

Β. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις :

$$(\varepsilon_1): \alpha x+\beta y=1 \text{ και } (\varepsilon_2): 2\beta x+(\alpha-\beta)y=-2 \text{ με } \alpha,\beta\in R \text{ και } \beta\neq 0,\ \alpha\neq\beta.$$

i. Βρείτε σχέση μεταξύ των α, β ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.
ii. Υπάρχουν τιμές των α, β ώστε οι ευθείες να ταυτίζονται;
iii. Στην περίπτωση που οι ευθείες τέμνονται να αποδείξετε ότι το σημείο τομής τους κινείται σε σταθερή ευθεία.

Θέμα 3ο

Α. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ του επιπέδου, επαληθεύουν την σχέση $(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$ (1).

i. Να αποδείξετε ότι: $(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1)(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$

ii. Εάν $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\neq 1$, να εκφράσετε το $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

Β. Να βρείτε ένα σημείο Μ της έλλειψης $c: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, τέτοιο ώστε να ισχύει $E'\widehat{ME}=90^o$.

Θέμα 4ο

Α. Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι κορυφές είναι $A(0,2)$, $B(2,2)$ και $\Gamma\left(3+\sqrt{3},3+\sqrt{3}\right)$. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου.

Β. Μεταβλητά σημεία Α και Β ολισθαίνουν πάνω στους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα έτσι ώστε $\frac{1}{(OA)}+\frac{1}{(OB)}=\lambda$, με λ σταθερό και $\lambda\in R^*$. Να δείξετε ότι η ευθεία ΑΒ διέρχεται από σταθερό σημείο.

Θέμα 5ο

Α. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ και ισχύει $(2+\kappa)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+(\kappa-\lambda)\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{0}$, υπολογίστε τους πραγματικούς κ, λ.

Β. Βρείτε την υπερβολή με εστίες στον y΄y ,όταν διέρχεται από το σημείο $M\left(4,\sqrt{2}\right)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{1}{4}x$ και $y=-\frac{1}{4}x$.

Θέμα 6ο

Α. Αν $|\vec{\rho}|=1$, $|\vec{q}|=\sqrt{2}$ και η γωνία $(\vec{\rho},\vec{q})=45^o$, να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\rho}-\vec{q},\vec{q}}\right)$.

Β. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 4k^2x-4ky+30=0$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $k\in R^*$ εφάπτεται στην παραβολή $C_1: y^2=30x$, κατόπιν να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες της C_1 και του κύκλου $C_2:(x+1)^2+y^2=1$.

Θέμα 7ο

Ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ μια πλευρά βρίσκεται στην ευθεία $\varepsilon: x-2y+12=0$, το κέντρο του Κ είναι το σημείο $(1,-1)$ και μια κορυφή του είναι η $\Lambda(4,8)$. Να βρεθούν οι άλλες κορυφές του.

Θέμα 8ο

Α. Αν $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{3}$, $|\vec{\gamma}|=2$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\left(\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)=\frac{\pi}{4}$, να βρεθεί το μέτρο του $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

Β. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που εφάπτεται στην ευθεία $c: x-y+1=0$ και έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Θέμα 9ο

Α. Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=2$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να βρεθεί το μέτρο του $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

Β. Να αποδειχθεί ότι ο λόγος των αποστάσεων τυχαίου σημείου Μ της έλλειψης $C:\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ από την εστία Ε και την ευθεία $\delta: x=\frac{\alpha^2}{\gamma}$ είναι ίσος με $\frac{\gamma}{\alpha}$.

Θέμα 10ο

Α. Έστω $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^o$. Προσδιορίστε το $x\in R$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

i. Αν $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})(\vec{\alpha}-x\vec{\beta})=2$ και **ii.** Αν $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-x\vec{\beta})$

Β. Δίνεται η εξίσωση $\kappa(x+2y)+\lambda(x+2y)-3x-5y+1=0$, $\kappa,\lambda\in R$.

α. Να δειχθεί, ότι παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa,\lambda\in R$.

β. Να δειχθεί ότι όλες οι ευθείες της παραπάνω μορφής διέρχονται από σταθερό σημείο.

Θέμα 11ο

Α. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ του επιπέδου ισχύουν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $3|\vec{\alpha}|=4|\vec{\beta}|=12|\vec{\gamma}|$, να αποδειχθεί ότι: i. $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$ και ii. $\vec{\beta}\parallel\vec{\gamma}$.

Β. Οι κορυφές Α, Γ τετραγώνου ΟΑΒΓ βρίσκονται αντίστοιχα στους άξονας x΄x και y΄y συστήματος συντεταγμένων xOy και η διαγώνιος ΑΓ περνά από το σημείο $P(1,2)$. Υπολογίστε τις συντεταγμένες των κορυφών του τετραγώνου.

Θέμα 12ο

Α. Έστω $x_1,x_2,y_1,y_2\in R$ με $12x_1-5y_1+1=0$ και $12x_2-5y_2-25=0$, να αποδειχθεί ότι:

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\geq 4$$

Β. Δίνεται η εξίσωση $x^2-y^2-4\lambda y-2\lambda x-3\lambda^2=0$, $\lambda\in R$

α. Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) κάθετες μεταξύ τους για κάθε $\lambda\in R$.

β. Αν Β και Γ σημεία των ευθειών ε_1 και ε_2 αντίστοιχα με τετμημένη $\lambda+1$,δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και έχει σταθερό εμβαδόν , για κάθε $\lambda\in R$.

γ. Για κάθε $\lambda\in R$ δείξτε ότι το Α κινείται σε σταθερή ευθεία.

Θέμα 13ο

Δίνεται η εξίσωση $C:\dfrac{x^2}{\lambda+4}+\dfrac{y^2}{\lambda+5}=1$.

α. Για ποιές τιμές των $\lambda\in R$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει υπερβολή;

β. Για τις παραπάνω τιμές των λ να βρεθούν οι εστίες της.

Θέμα 14ο

Α. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|=1$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2\geq 3$.

Β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τις ευθείες $\varepsilon_1: x-\lambda y=0$ και $\varepsilon_2: x+2y=0$ είναι ίσος με 2.

Θέμα 15ο

Α. Στο σύστημα αναφοράς Οxy θεωρούμε τα σημεία $A(3,2)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(0,4)$. Η ΑΓ τέμνει τον Οx στο Δ και η ΑΒ τον Oy΄ στο Ε.

α. Να βρείτε την τετμημένη του Δ και την τεταγμένη του Ε.

β. Αν Ι το μέσο του ΟΑ, Μ το μέσο του ΒΓ και Κ το μέσο του ΕΔ, να δείξετε ότι τα σημεία Ι, Μ, Κ είναι συνευθειακά.

Β. Μια μεταβλητή ευθεία $y=\lambda x+\beta$ τέμνει την παραβολή $C: y^2=4x$ στα σημεία Α, Β.

Να δειχθεί ότι οι συνεταγμένες του μέσου Μ της ΑΒ είναι $\left(\frac{2-\lambda\beta}{\lambda^2},\frac{2}{\lambda}\right)$. Κατόπιν να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. όταν είναι $\lambda=1$ και $\beta\in R$ και **ii.** όταν $\beta=0$ και $\lambda\in R^*$.

Θέμα 16ο

Α. Έστω τα σημεία $A(3,-4)$, $B\left(-\frac{7}{2},-2\right)$, $\Gamma\left(0,-\frac{8}{5}\right)$, $\Delta\left(-\frac{13}{4},-\frac{3}{5}\right)$

i. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

ii. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Ε, ώστε το ΟΒΑΕ να είναι παραλληλόγραμμο.

iii. Να δείξετε ότι το σημείο $Z\left(\frac{13}{5},-\frac{12}{5}\right)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΓΔ.

Β. Βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ, όταν $A(4,1)$ και ένα ύψος του και μια διάμεσός του έχουν εξισώσεις $y=-x-1$ και $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ αντίστοιχα.

Θέμα 17ο

Α. Αν $\vec{v}_1=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{v}_2=2\vec{i}-5\vec{j}$, $\vec{v}_3=-5\vec{i}-\vec{j}$ να βρεθούν :

i. Οι συνεταγμένες, τα μέτρα και οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων:

$$\vec{w}_1=2\vec{v}_1+3\vec{v}_2\ ,\quad \vec{w}_2=2\vec{v}_2-3\vec{v}_3\ ,\quad \vec{w}_3=2\vec{v}_3+3\vec{v}_1\ .$$

ii. Το μέτρο $\left|\vec{w}_1-\vec{w}_2+\vec{w}_3\right|$.

Β. Ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ $(\hat{A}=90^o)$ είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $C: y^2=2px,\ p>0$. Αν η κορυφή Α έχει συντεταγμένες $(2,p)$ να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς ΑΒ.

Θέμα 18ο

Α. Έστω παρ/μο ΑΒΓΔ. Στις απέναντι πλευρές του ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα τέτοια ώστε : $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{BZ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$. Αν $\overrightarrow{A\Delta}=(3,0)$ και $\overrightarrow{AB}=(1,4)$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{AP}$, όταν $\overrightarrow{EP}=2\overrightarrow{PZ}$.

Β. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): x+y-3=0\ ,\ (\varepsilon_2): 3x-y-1=0 \text{ και } (\varepsilon_3): (2\mu-1)x+(2-\mu)y+\mu=0$$

α. Να βρεθεί το $\mu \in R$, ώστε οι τρείς ευθείες να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

β. Από όλες τις ευθείες του επιπέδου, που διέρχονται από το παραπάνω σημείο, να βρεθούν εκείνες που σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Θέμα 19ο

Α. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει το ίδιο μήκος με το διάνυσμα $\vec{\beta}=(8,\ -6)$ και την διεύθυνση του $\vec{\gamma}=(2,\ \ 2\sqrt{3})$. Να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+y^2+2xy-3x-3y+2=0$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές με τους άξονες.

Θέμα 20ο

Α. Έστω σημεία Α και Β της ευθείας $x-\frac{2}{3}y=\frac{7}{3}$ με $x_A=1$ και $x_B=2$. Να βρεθεί σημείο Μ τέτοιο ώστε $2\vec{MA}+3\vec{MB}=4\vec{AB}$.

Β. Ορθογώνιο ΟΑΒΓ έχει σταθερή περίμετρο 2κ και τις κορυφές του Α, Γ στους θετικούς ημιάξονες Οx, Oy αντίστοιχα. Δείξτε ότι η κάθετος από το Β στη διαγώνιο ΑΓ περνά από σταθερό σημείο.

Θέμα 21ο

Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x,y)$ με $x=3+\sigma\upsilon\nu 2\theta$ και $y=1+\sigma\upsilon\nu 2\theta$, $\theta\in R$ βρίσκεται για κάθε $\theta\in R$ πάνω σε ευθειά.

Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x_0,y_0)$ των οποίων η απόσταση από τον $y'y$ ισούται με το μήκος της εφαπτόμενης ΜΑ στον κύκλο $C:(x-1)^2+y^2=1$.

Θέμα 22ο

Α. Δίδονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(1,\ -4)$. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων για τα οποία ισχύει $\vec{MA}^2-\vec{MB}^2=5$.

Β. α. Η προβολή της αρχής των αξόνων στην ευθεία (ε), είναι το σημείο $(2,3)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

β. Δίνεται η ευθεία (ε) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ και το σημείο $A(3,1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του Α ως προς την ευθεία (ε).

Θέμα 23ο

A. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφή $A(1,2)$ και οι εξισώσεις των δύο διαμέσων του είναι $y=1$ και $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του.

B. Αν ο κύκλος $c:(x+8)^2+(y-6)^2=\rho^2$ εφάπτεται στον κύκλο c_1 που έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ, να βρείτε :

α. Την ακτίνα ρ.

β. Τα σημεία της ευθείας $y=2x-5$ απο τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο c_1 είναι κάθετες.

(**Απ.: α.** ρ = 5, **β.** $(-1,-7),(5,5)$)

Θέμα 24ο

A. Οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2, λ_3. Να αποδείξετε ότι $\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1=-3$.

B. Θεωρούμε την έλλειψη $c:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και έστω Μ ένα τυχαίο σημείο της. Να δειχτεί ότι ο γεωμετρικός τόπος ορθόκεντρων των τριγώνων A_1MA_2 (A_1, A_2 είναι σημεία τομής της έλλειψης με τον άξονα x΄x) είναι επίσης έλλειψη.

Θέμα 25ο

A. Αν $B(2,6)$ και οι εξισώσεις του ύψους και της διχοτόμου της γωνίας που φέρνουμε από την ίδια κορυφή είναι αντίστοιχα $y=\frac{1}{7}x+\frac{15}{7}$ και $y=-7x-5$. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

B. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής: $y^2=2px$ $(p>0)$ που εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon:3x-2y+3=0$.

Θέμα 26ο

A. Έστω $M(\alpha,\beta)$ με $\alpha, \beta\neq 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ και τέμνει τους άξονες σε σημεία τα οποία ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα που έχει μέσο το Μ.

B. Δίνονται τα σημεία $K(\sqrt{7},0)$ και $\Lambda(-\sqrt{7},0)$. Να βρεθούν τα σημεία $M(x,y)$ που απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ και για τα οποία ισχύει $(MK)+(M\Lambda)=8$. Κατόπιν να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου που αυτά ορίζουν.