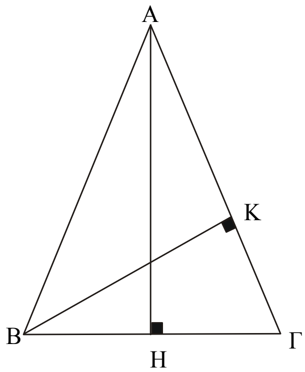
Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. i. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΓ, με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος, έχουμε:

$ΑΗ^2 = ΑΓ^2 - ΗΓ^2 = 7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45$.

Άρα $ΑΗ = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm.



ii. Για το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$(ΑΒΓ) = \frac{ΒΓ \cdot ΑΗ}{2} = \frac{ΑΓ \cdot ΒΚ}{2}, \text{ άρα}$$

$$ΒΚ = \frac{ΒΓ \cdot ΑΗ}{ΑΓ}$$

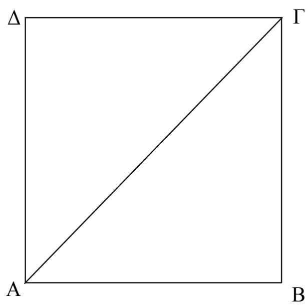
$$ΒΚ = \frac{4 \cdot 3\sqrt{5}}{7} = \frac{12\sqrt{5}}{7} \text{ cm}$$

2. i. Υπολογισμός της πλευράς ΑΒ:

Έχουμε: $ΑΒ + ΑΓ = 2 + \sqrt{2}$ ή

$ΑΒ + ΑΒ\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$

$ΑΒ(1 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$



$$ΑΒ = \frac{(2+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}$$

$$ΑΒ = \frac{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}$$

$$ΑΒ = \frac{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{2-1}$$

$$ΑΒ = (2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}$$

ii. Υπολογισμός της πλευράς ΑΓ:

Από την αρχική σχέση έχουμε: $ΑΒ + ΑΓ = 2 + \sqrt{2}$ ή $ΑΓ = 2 + \sqrt{2} - ΑΒ$

Άρα $ΑΓ = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}$

$ΑΓ = 2$

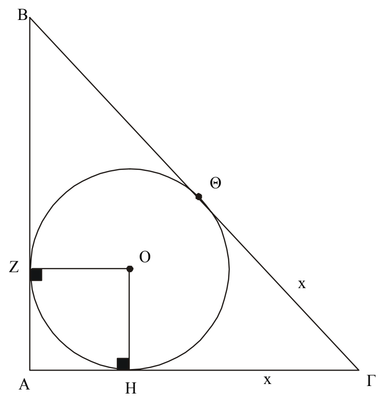
3. Είναι ΖΟ ⊥ ΑΒ, ΟΗ ⊥ ΑΓ

ΖΟ = ΟΗ = 4 cm, ΑΖ = 4 cm

Άρα ΒΖ = 12 cm, άρα ΒΘ = 12 cm

Αν ΘΓ = x, τότε ΗΓ = x

Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΓ και με δεδομένο ότι ΑΒ = 16, ΑΓ = 4 + x, ΒΓ = x + 12, έχουμε:



$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$

$16^2 + (4 + x)^2 = (x + 12)^2$

$256 + 16 + 8x + x^2 = x^2 + 24x + 144$

$24x - 8x = 256 + 16 - 144$

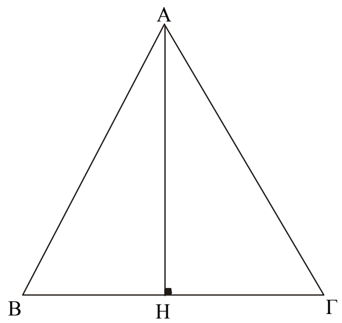
$16x = 128$

$x = \frac{128}{16}$, άρα $x = 8$

Άρα i. $ΒΓ = 8 + 12 = 20$ cm

ii. $ΑΓ = 4 + 8 = 12$ cm

4. i. Αν α η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου, με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΗΓ έχουμε:



$ΑΗ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$.

Άρα η σχέση ΒΓ - ΑΗ = 12 cm γράφεται

$α - \frac{α\sqrt{3}}{2} = 12$. Άρα:

$α\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 12$ ή $α = \frac{12}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{2-\sqrt{3}}$

Άρα $α = 24(2 + \sqrt{3})$ cm

ii. $υ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$. Άρα $υ = \frac{24(2+\sqrt{3})\sqrt{3}}{2} = 12(2 + \sqrt{3})\sqrt{3}$ cm =

$12\,(2\sqrt{3} + 3)$ cm.

5. $(5\beta)^2 + (5\gamma)^2 = 25\beta^2 + 25\gamma^2 = 25\,(\beta^2 + \gamma^2) = 25\alpha^2 = (5\alpha)^2$

Άρα το τρίγωνο με πλευρές 5α, 5β, 5γ είναι ορθογώνιο.

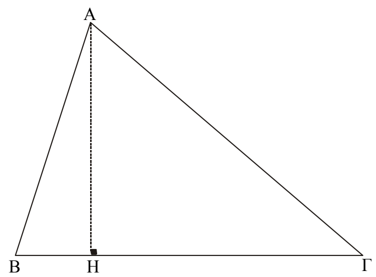
6. Έστω ΑΓ > ΑΒ. Φέρνουμε το ύψος ΑΗ και έχουμε:

$ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = (ΑΗ^2 + ΗΓ^2) - (ΑΗ^2 + ΒΗ^2) = ΗΓ^2 - ΗΒ^2$

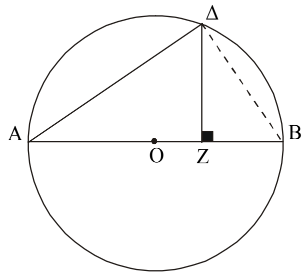
Σημείωση:

Τρίγωνο ΑΗΓ ορθογώνιο, άρα $ΑΓ^2 = ΑΗ^2 + ΗΓ^2$

Τρίγωνο ΑΗΒ ορθογώνιο, άρα $ΑΒ^2 = ΑΗ^2 + ΗΒ^2$



7. Πρέπει να δείξουμε ότι $ΑΔ^2 = ΑΒ \cdot ΑΖ$. Φέρνουμε την ΔΒ. Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο στο Δ. Άρα από το ΑΔΒ τρίγωνο, έχουμε: $ΑΔ^2 = ΑΒ \cdot ΑΖ$ (Το τετράγωνο μιας καθέτου πλευράς ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πάνω στην υποτείνουσα).

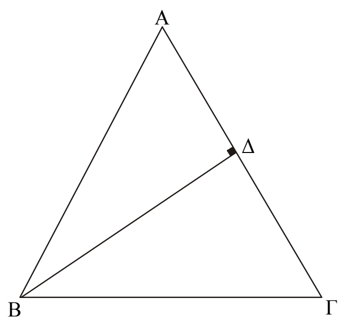


8. Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο, άρα $ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2$

Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ορθογώνιο, άρα $ΒΓ^2 = ΒΔ^2 + ΔΓ^2$

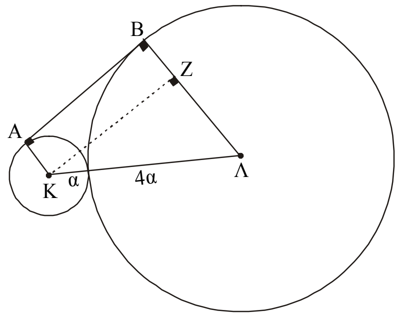
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2$

Άρα



$ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2 + ΒΔ^2 + ΔΓ^2 + ΑΔ^2 + ΒΔ^2 = ΓΔ^2 + 2ΑΔ^2 + 3ΒΔ^2$

9. i. $\left.\begin{matrix} ΑΚ \perp ΑΒ \\ ΒΛ \perp ΑΒ \end{matrix}\right\}$, άρα ΑΚ // ΒΛ, άρα ΑΒΛΚ τραπέζιο

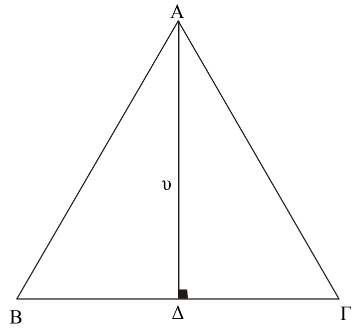


ii. Φέρνουμε ΚΖ // ΑΒ, ΚΖ = ΑΒ (ΑΚΖΒ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο). Το τρίγωνο ΚΖΛ είναι ορθογώνιο στο Ζ. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$ΚΖ^2 = ΚΛ^2 - ΖΛ^2$ ή $ΚΖ^2 = (5α)^2 - (3α)^2 = 25α^2 - 9α^2 = 16α^2$

$ΚΖ = 4α$, $ΚΖ = ΑΒ = 4α$

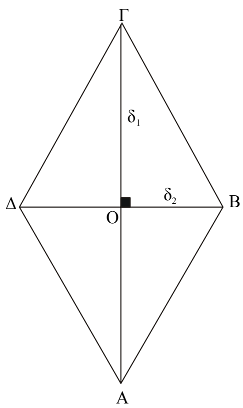
10. Το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά α.



i. $υ = \dfrac{α\sqrt{3}}{2}$ (ύψος ισοπλεύρου τριγώνου)

ii. $υ' = \dfrac{υ\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\frac{α\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$ ή $υ' = \dfrac{3α}{4}$

11. Έστω $ΑΓ = δ_1$, $ΒΔ = δ_2$ και $ΒΓ = \dfrac{84}{4} = 21$ cm



Ισχύει: $δ_2 = \dfrac{3}{5}\, δ_1$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΓ έχουμε:

$\left(\dfrac{δ_2}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{δ_1}{2}\right)^2 = 21^2$ (2)

Με λύση του συστήματος των (1) και (2) έχουμε:

$$\left(\frac{\frac{3}{5}\delta_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 = 21^2 \text{ ή } \frac{9}{25}\delta_1^2 + \delta_1^2 = 441{\cdot}4 \text{ ή } \frac{34}{25}\delta_1^2 = 1764$$

$$34\delta_1^2 = 25{\cdot}441{\cdot}4$$

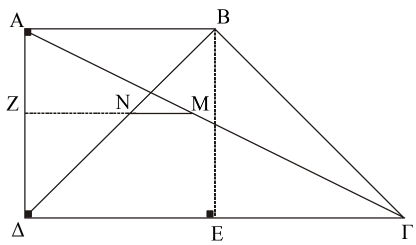
$$\delta_1^2 = \frac{25\cdot 441\cdot 4}{34}$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{25\cdot 441\cdot 4}{34}} = \frac{5\cdot 2\cdot 21}{34}\sqrt{34}\text{ cm}$$

$$\text{Άρα } \delta_2 = \frac{3}{5}\delta_1 = \frac{3}{5}\cdot\frac{5\cdot 2\cdot 21}{34}\sqrt{34} = \frac{\sqrt{34}\cdot 126}{34} = \frac{63\sqrt{34}}{17}\text{ cm}$$

12. i. Φέρνουμε $ΒΕ \perp ΓΔ$.

Η ευθεία ΜΝ διέρχεται και από το μέσον της πλευράς ΑΔ.



Άρα $ΖΜ = \frac{ΔΓ}{2}$, $ΖΝ = \frac{ΑΒ}{2}$ και

$ΜΝ = ΖΜ - ΖΝ$, άρα

$$ΜΝ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2} = \frac{ΔΓ - ΔΕ}{2} = \frac{ΕΓ}{2} \quad (1)$$

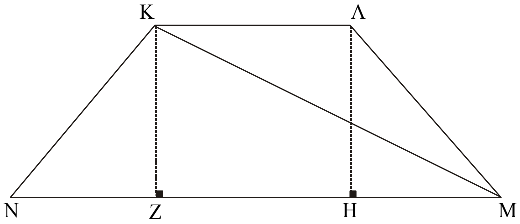
ii. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΒΕ^2 + ΕΓ^2 = ΑΔ^2 + ΕΓ^2$ ή $ΒΓ^2 - ΑΔ^2 = ΕΓ^2$ (2)

Από την (1) έχουμε: $ΕΓ = 2ΜΝ$ ή $ΕΓ^2 = 4ΜΝ^2$ (3)

Από (2) και (3) έχουμε: $ΒΓ^2 - ΑΔ^2 = 4ΜΝ^2$

13. i. Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΚΖΝ, ΛΗΜ έχουμε ΖΝ = ΗΜ.



ii. Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΖΜ, ΚΖΝ έχουμε:

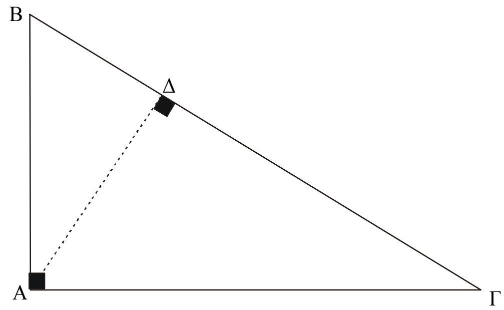
$KM^2 = KZ^2 + ZM^2$ (1)

$KN^2 = KZ^2 + ZN^2$ (2)

Με αφαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

$KM^2 - KN^2 = ZM^2 - ZN^2 = (ZM + ZN)(ZM - ZN) = MN \cdot ZH = NM \cdot K\Lambda$

14. $AB = \frac{3}{4} A\Gamma$, άρα $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{3}{4}$

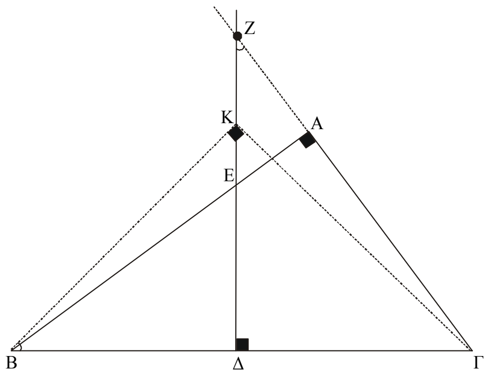


Αλλά $\frac{(AB)^2}{(A\Gamma)^2} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$, άρα

$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

15. i. Το ΔΚ είναι ύψος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΓ.

Άρα $\Delta K^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$



ii. Αρκεί να δείξουμε

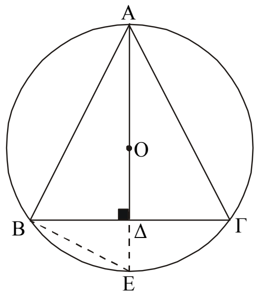
$\Delta B \cdot \Delta\Gamma = \Delta Z \cdot \Delta E$ ή

$\frac{\Delta B}{\Delta E} = \frac{\Delta Z}{\Delta\Gamma}$

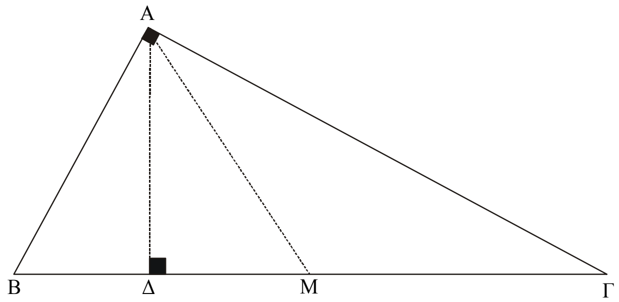
Τα τρίγωνα ΒΔΕ, ΖΔΓ είναι ορθογώνια και $E\hat{B}\Delta = \Delta\hat{Z}\Gamma$ (έχουν κάθετες πλευρές).

Συνεπώς $B\overset{\Delta}{\Delta}E \approx Z\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$. Άρα $\Delta B \cdot \Delta\Gamma = \Delta Z \cdot \Delta E$

16. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΒΓ = ΑΔ = 8 cm. Το κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου είναι πάνω στην ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΑΔ και έστω Ε το σημείο τομής της με τον περιγεγραμμένο κύκλο. Φέρουμε την ΒΕ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε $ΒΔ^2 = ΑΔ \cdot ΔΕ$. Αλλά ΔΕ = ΑΕ - ΑΔ = 2R - 8. Άρα $4^2 = 8\,(2R - 8)$. Άρα R = 5 cm.



17. Το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.
Αφού $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$,
έχουμε $\hat{B} = 60°$,
$\hat{\Gamma} = 30°$



ΑΔ το ύψος και ΑΜ η διάμεσος του ΑΒΓ.

Άρα $\dfrac{ΑΓ^2}{ΑΒ^2} = \dfrac{ΔΓ}{ΔΒ}$ (1) $\quad ΑΜ = \dfrac{ΒΓ}{2} = ΒΜ$ (2)

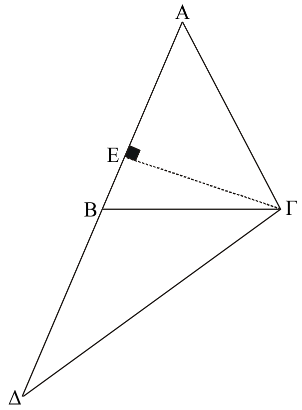
Άρα το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο (αφού $\hat{B} = 60°$). Άρα ΑΔ ύψος και διάμεσος για το ΑΒΜ. Άρα $ΔΒ = \dfrac{ΒΜ}{2} = \dfrac{ΜΓ}{2}$ (3)

Άρα από (1), (3) έχουμε $\dfrac{ΑΓ^2}{ΑΒ^2} = \dfrac{ΔΜ + ΜΓ}{ΔΒ} = \dfrac{ΔΒ + 2ΔΒ}{ΔΒ} = \dfrac{3ΔΒ}{ΔΒ} = 3$

18. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΔ, έχουμε:

$$Γ\Delta^2 = \Delta E^2 + EΓ^2 = \left(\frac{5AB}{4}\right)^2 + EΓ^2 =$$

$$AB^2 + \left(\frac{3AB}{4}\right)^2 + EΓ^2 \qquad (1)$$



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ, έχουμε:

$$BΓ^2 = EΓ^2 + BE^2 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$Γ\Delta^2 = AB^2 + \frac{9}{16}\ AB^2 + EΓ^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{4}\right)^2 + \frac{8}{16}\ AB^2 + EΓ^2 =$$

$$AB^2 + BE^2 + EΓ^2 + \frac{8}{16}\ AB^2 = BΓ^2 + AB^2 + \frac{1}{2}\ AB^2 =$$

$$BΓ^2 + \frac{3}{2}\ AB^2 = BΓ^2 + \frac{3}{2}\ AΓ^2$$

19. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΙΝ έχουμε:

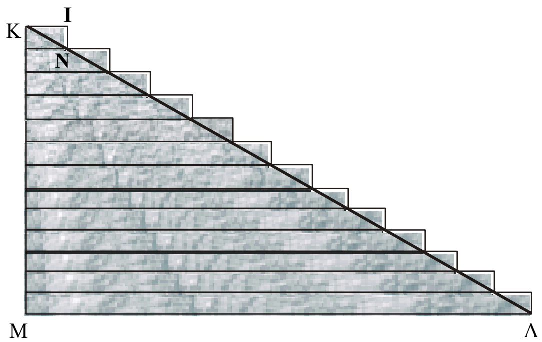
$KN^2 = 30^2 + 40^2$ ή

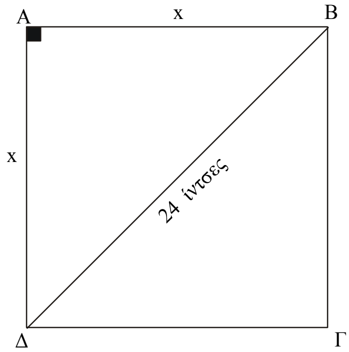
$KN^2 = 900 + 1600$ ή

$KN = 50$ cm

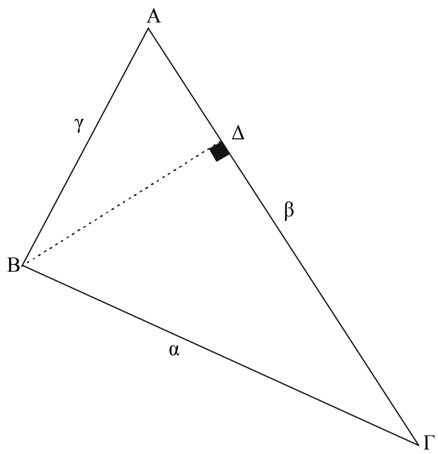
$K\Lambda = 13 \cdot 50$ cm ή

$K\Lambda = 650$ cm



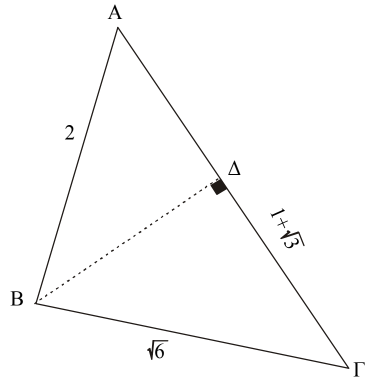


20. Με Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:
$2x^2 = 24^2$ ή $x^2 = 288$ ή
$x = \sqrt{288}$ ή $x \approx 17$ ίντσες



21. Αν α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε: $\frac{\gamma}{4} = \frac{\beta}{5} = \frac{\alpha}{6} = \kappa$. Τότε:
$\gamma = 4\kappa,\ \beta = 5\kappa,\ \alpha = 6\kappa$ (1)
Ισχύει: $36\kappa^2 < 25\kappa^2 + 16\kappa^2$ ή
$36\kappa^2 < 41\kappa^2$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.
Επίσης, με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε:
$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\cdot A\Delta$ ή $36\kappa^2 = 25\kappa^2 + 16\kappa^2 - 2\cdot 5\cdot \kappa\cdot A\Delta$ ή $-5\kappa^2 = -10\kappa\cdot A\Delta$
Άρα $A\Delta = \frac{\kappa}{2}$ ή $A\Delta = \frac{15\kappa}{30}$ ή $A\Delta = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{30}$ (λόγω της (1)).

22. Έστω ΒΓ = $\sqrt{6}$, ΑΓ = 1 + $\sqrt{3}$, ΑΒ = 2



Όπως προκύπτει από τις σχέσεις των μηκών των πλευρών, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο. Με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$(\sqrt{6})^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + 2^2 - 2\,(1 + \sqrt{3})\,ΑΔ$

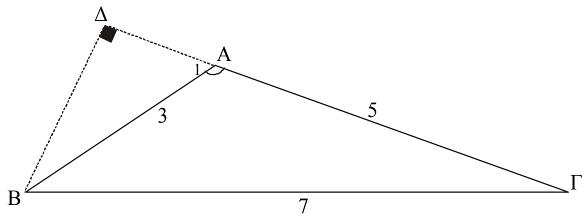
$6 = 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\,(1 + \sqrt{3})\,ΑΔ$

$6 - 8 - 2\sqrt{3} = - 2\,(1 + \sqrt{3})\,ΑΔ$

$- 2\,(1 + \sqrt{3}) = - 2\,(1 + \sqrt{3})\,ΑΔ$, άρα ΑΔ = 1

Αλλά συνΑ = $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{2}$. Άρα Α = 60°.

23. i. Έχουμε: $7^2 > 5^2 + 3^2$, $49 > 34$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία τη γωνία $\hat{Α}$.



ii. Με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$7^2 = 5^2 + 3^2 + 2\cdot5\cdot ΑΔ$

$49 = 25 + 9 + 10ΑΔ$

$15 = 10ΑΔ$ ή $ΑΔ = 1,5$ cm

συν$\hat{Α}_1 = \frac{1,5}{3} = 0,5 = \frac{1}{2}$, άρα $\hat{Α}_1 = 60°$, άρα $\hat{Α} = 120°$

24. Στο τρίγωνο ΑΒΔ, με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος, έχουμε:

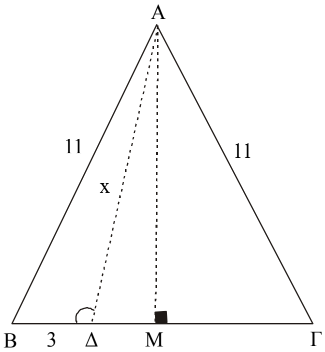
$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 + 2B\Delta\cdot\Delta M$

$11^2 = x^2 + 3^2 + 2\cdot3\cdot2$

$121 = x^2 + 9 + 12$

$121 = x^2 + 21$, άρα $x^2 = 100$, άρα $x = 10$

Άρα $A\Delta = 10$



25.

$$\left.\begin{aligned}\mu_\alpha^2 &= \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}\\ \mu_\beta^2 &= \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4}\\ \mu_\gamma^2 &= \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}\end{aligned}\right\}$$

. Έστω $\mu_\alpha = 5$, $\mu_\beta = 3$, $\mu_\gamma = 4$. Θα είναι:

$\mu_\alpha^2 = \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2$ ή $2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 = 2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2$ ή

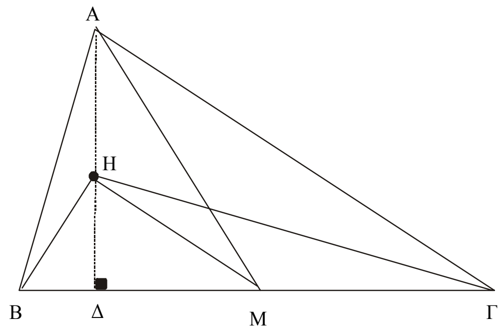
$\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2 > \alpha^2$, τότε $\hat{A} < 90°$. Παρόμοια βρίσκουμε $\hat{B} < 90°$ ή $\hat{\Gamma} < 90°$

26. Έστω το Μ μέσον της ΒΓ. Στο τρίγωνο ΒΗΓ με εφαρμογή του 2ου θεωρήματος διαμέσων έχουμε:

$H\Gamma^2 - HB^2 = 2B\Gamma\cdot\Delta M$ (1)

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

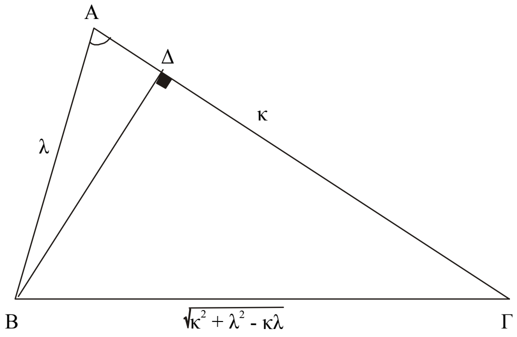
$A\Gamma^2 - AB^2 = 2B\Gamma\cdot\Delta M$ (2)



Από (1) και (2) έχουμε: $H\Gamma^2 - HB^2 = A\Gamma^2 - AB^2$

27. Είναι: $\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa\lambda < \kappa^2 + \lambda^2$.

Άρα η γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά $\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa\lambda}$ είναι οξεία.



Έχουμε: $\left(\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa\lambda}\right)^2 =$

$\kappa^2 + \lambda^2 - 2\kappa \cdot \mathrm{Α\Delta}$

$\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa\lambda = \kappa^2 + \lambda^2 - 2\kappa\cdot \mathrm{Α\Delta} - \kappa\lambda = -\, 2\kappa\cdot \mathrm{Α\Delta}$

$\lambda = 2\mathrm{Α\Delta}$ ή $\mathrm{Α\Delta} = \dfrac{\lambda}{2}$. Όμως $\text{συν}Α = \dfrac{\mathrm{Α\Delta}}{\mathrm{ΑΒ}} = \dfrac{\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{1}}$ ή $\text{συν}Α = \dfrac{1}{2}$, άρα $\hat{Α} = 60°$

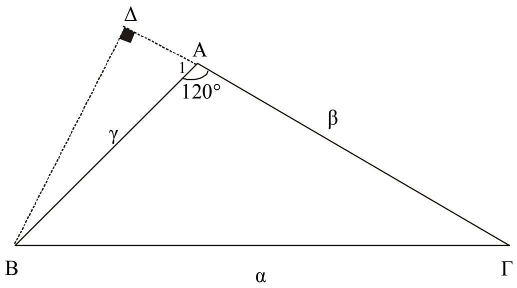
28. Ισχύει $\mu_\beta < \mu_\gamma$, άρα $\mu_\beta^2 < \mu_\gamma^2$.

Άρα $\dfrac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} < \dfrac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$ ή $3\gamma^2 < 3\beta^2$ ή $\gamma^2 < \beta^2$. Άρα $\beta > \gamma$.

29. i. Ισχύει:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\cdot \mathrm{Α\Delta}$ (1)

Στο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:



$\text{συν}Α_1 = \dfrac{\mathrm{Α\Delta}}{\gamma}$

$\text{συν}60° = \dfrac{\mathrm{Α\Delta}}{\gamma}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{Α\Delta}}{\gamma}$, άρα $\mathrm{Α\Delta} = \dfrac{\gamma}{2}$ (2)

ii. Από (1) και (2) έχουμε:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\,\dfrac{\gamma}{2}$ $\qquad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$

30. i. $7^2 > 3^2 + 5^2$ δηλαδή $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2$, άρα

$\hat{B}$ αμβλεία

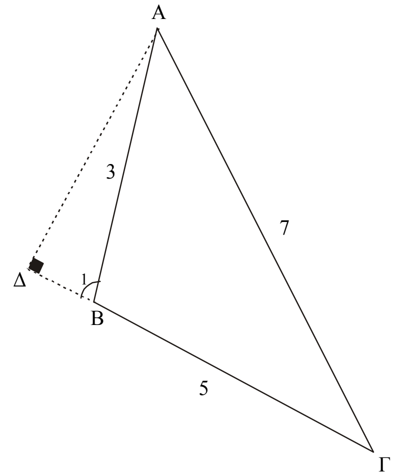
ii. $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot \Delta B$

$7^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot \Delta B$ ή

$49 - 25 - 9 = 10\Delta B$ ή $\Delta B = 1{,}5$

iii. $\sigma\upsilon\nu B_1 = \dfrac{\Delta B}{AB} = \dfrac{1{,}5}{3} = 0{,}5.$

Άρα $B_1 = 60°$, άρα $\hat{B} = 120°$

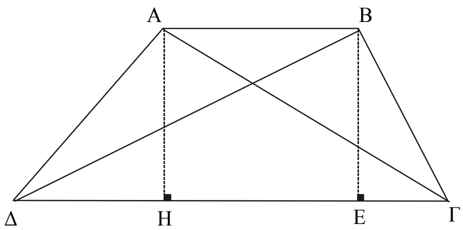


31. Στο τρίγωνο ΑΔΓ με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot \Delta H$ (1)

Ομοίως στο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε:

$\Delta B^2 = B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot E\Gamma$ (2)



Προσθέτουμε τις (1), (2):

$A\Gamma^2 + \Delta B^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot \Delta H + B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot E\Gamma =$

$A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma\,(\Delta H + E\Gamma).$

Αλλά $\Delta H + E\Gamma = AB = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα: $A\Gamma^2 + \Delta B^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma^2 - \dfrac{2\Delta\Gamma \cdot \Delta\Gamma}{2} =$

$A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma^2 - \Delta\Gamma^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2$

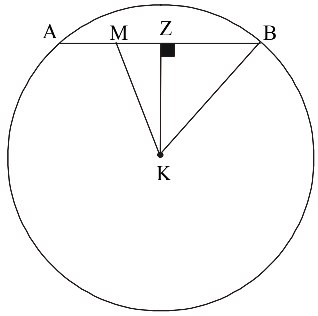
32. Στο τρίγωνο ΜΚΒ με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$KB^2 = MK^2 + MB^2 - 2MB \cdot MZ$

$R^2 = MK^2 + MB\,(MB - 2MZ)$

Αλλά $MB - 2MZ = AM$

Άρα $R^2 = MK^2 + MB \cdot AM$



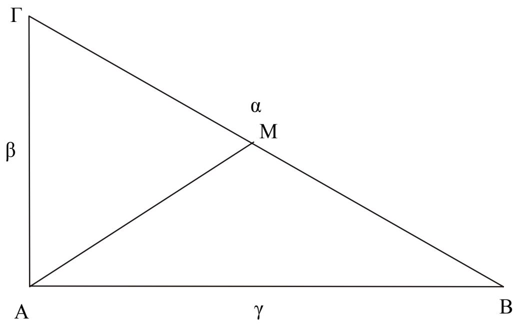
33. Έχουμε:

$\gamma^2 + \beta^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$

$2\mu_\alpha^2 = \gamma^2 + \beta^2 - \dfrac{\alpha^2}{2}$

$2\mu_\alpha^2 = \alpha^2 - \dfrac{\alpha^2}{2} = \dfrac{\alpha^2}{2}$

$\mu_\alpha^2 = \dfrac{\alpha^2}{4}$, άρα $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha}{2}$

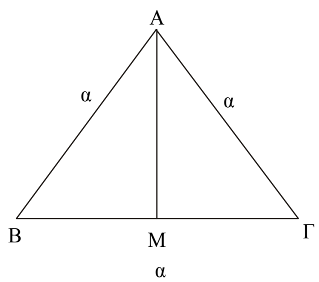


34. $AM = \mu_\alpha = \upsilon_\alpha$

$AB^2 + A\Gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{B\Gamma^2}{2}$

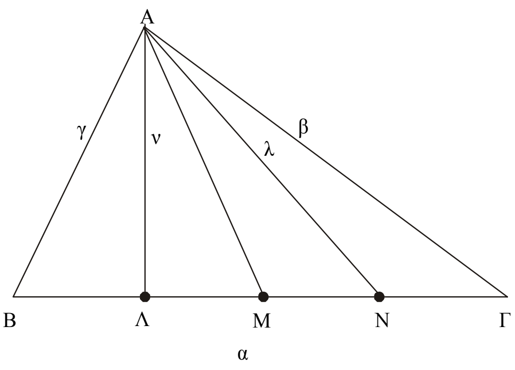
$2\mu_\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha^2 - \dfrac{\alpha^2}{2} = 2\alpha^2 - \dfrac{\alpha^2}{2} = \dfrac{3\alpha^2}{2}$

Τότε: $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \upsilon_\alpha$



35. Με εφαρμογή του 1ου θεωρήματος διαμέσων στο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\,B\,\Gamma}}$ έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mathrm{AM}^2 + \frac{\alpha^2}{2} \qquad (1)$$



Με εφαρμογή του θεωρήματος διαμέσων στο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\,\Lambda\,N}}$ έχουμε:

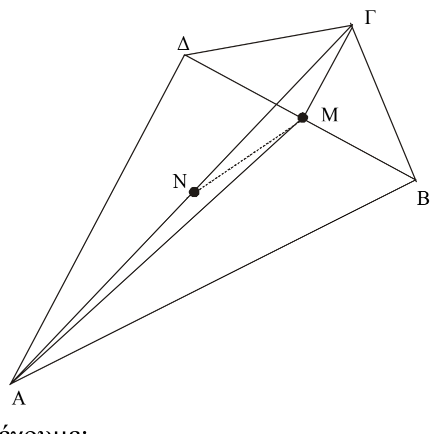
$$\lambda^2 + \nu^2 = 2\mathrm{AM}^2 + \frac{\Lambda\mathrm{N}^2}{2}.$$

Τότε: $2\mathrm{AM}^2 = \lambda^2 + \nu^2 - \frac{\Lambda\mathrm{N}^2}{2}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $\beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2 + \nu^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\Lambda\mathrm{N}^2}{2} =$

$$= \lambda^2 + \nu^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2} = \lambda^2 + \nu^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{8}, \text{ άρα } \beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2 + \nu^2 + \frac{3\alpha^2}{8}$$

36. Έστω Μ μέσον του ΒΔ και Ν μέσον του ΑΓ.



Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\,B\,\Delta}}$ έχουμε:

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Delta}^2 = 2\mathrm{AM}^2 + \frac{\mathrm{B\Delta}^2}{2} \quad (1)$$

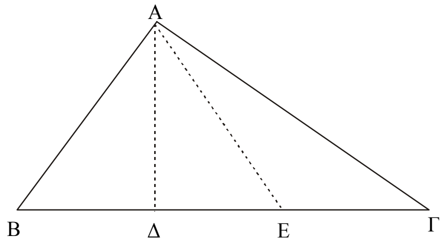
Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{B\,\Gamma\,\Delta}}$ έχουμε:

$$\mathrm{\Delta\Gamma}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 = 2\mathrm{\Gamma M}^2 + \frac{\mathrm{B\Delta}^2}{2} \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Delta}^2 + \mathrm{\Delta\Gamma}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 = 2\,(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{\Gamma M}^2) + \mathrm{B\Delta}^2 =$

$2\,(2\mathrm{MN}^2 + \frac{\mathrm{A\Gamma}^2}{2}) + \mathrm{B\Delta}^2 = 4\mathrm{MN}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{B\Delta}^2 \geq \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{B\Delta}^2$



37. Εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα διαμέσων στα τρίγωνα $A\overset{\Delta}{B}E$, $A\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$:

$$AB^2 + AE^2 = 2A\Delta^2 + \frac{BE^2}{2} \quad (1)$$

$$A\Delta^2 + A\Gamma^2 = 2AE^2 + \frac{\Delta\Gamma^2}{2} \quad \text{ή}$$

$$2A\Delta^2 + 2A\Gamma^2 = 4AE^2 + \Delta\Gamma^2 \quad (2)$$

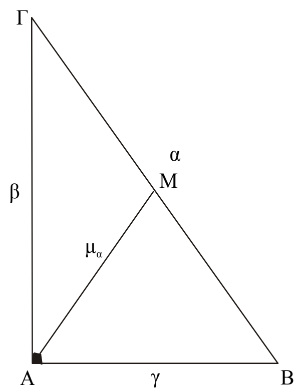
Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2):

$$AB^2 + AE^2 + 2A\Delta^2 + 2A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + 4AE^2 + \Delta\Gamma^2 + \frac{BE^2}{2} \quad \text{ή}$$

$$AB^2 + 2A\Gamma^2 = 3AE^2 + \Delta\Gamma^2 + \frac{BE^2}{2} \quad (3)$$

Αλλά: $\Delta\Gamma = 2\Delta E$, $BE = 2\Delta E$

Άρα η (3) γίνεται: $AB^2 + 2A\Gamma^2 = 3AE^2 + 4\Delta E^2 + 2\Delta E^2 = 3AE^2 + 6\Delta E^2$



38. i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$

Άρα πρέπει να δειχθεί: $\alpha^2 = 4\mu_\alpha^2$

Αλλά $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha}{2}$ ή $2\mu_\alpha = \alpha$.

Άρα $4\mu_\alpha^2 = \alpha^2 \quad (1)$

ii. $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \dfrac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + \dfrac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$

$=$

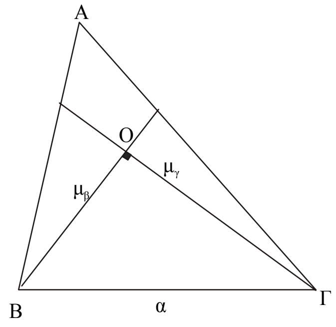
$\dfrac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} = \dfrac{5\alpha^2}{4} = \alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{4} = 5\mu_\alpha^2$ (λόγω της (1)).

39. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{BO\Gamma}}$ είναι ορθογώνιο. Άρα:

$BO^2 + O\Gamma^2 = B\Gamma^2$

$(\frac{2}{3}\mu_\beta)^2 + (\frac{2}{3}\mu_\gamma)^2 = \alpha^2$

$\frac{4}{9}(\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2) = \alpha^2$



$\frac{4}{9}\left(\frac{4\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4}\right) = \alpha^2$ ή $4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9\alpha^2$ ή $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$

40. i. $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 =$

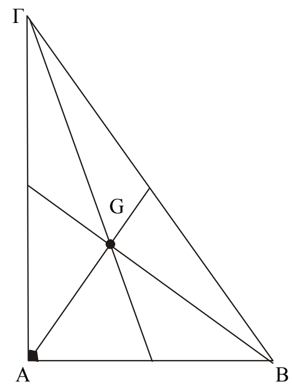
$$\frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2+2\alpha^2+2\gamma^2-\beta^2+2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}{4}$$

$$= \frac{3\beta^2+3\gamma^2+3\alpha^2}{4} = \frac{3(\beta^2+\gamma^2)+3\alpha^2}{4} =$$

$$\frac{3\alpha^2+3\alpha^2}{4} = \frac{6\alpha^2}{4} = \frac{3}{2}\alpha^2$$

ii. $GA^2 + GB^2 + G\Gamma^2 = (\frac{2}{3}\mu_\alpha)^2 + (\frac{2}{3}\mu_\beta)^2 + (\frac{2}{3}\mu_\gamma)^2 =$

$\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}\alpha^2 = \frac{2}{3}\alpha^2$



41. Ισχύει $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \dfrac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4}$ (1)

$5\mu_\alpha^2 = 5\ \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$ (2)

$\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 5\mu_\alpha^2$ (3)

Η σχέση (3) λόγω των (1) και (2) γίνεται:

$\dfrac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} = \dfrac{10\beta^2 + 10\gamma^2 - 5\alpha^2}{4}$ ή $4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 10\beta^2 + 10\gamma^2 - 5\alpha^2$

$9\alpha^2 = 9\beta^2 + 9\gamma^2$

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ορθογώνιο

42. Πρέπει να δειχθεί ότι:

$(\alpha^2 + \gamma^2) - (\beta^2 + \delta^2) = 2\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{ZH}$ ή

$(\alpha^2 - \beta^2) + (\gamma^2 - \delta^2) = 2\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{ZH}$

Στα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ εφαρμόζουμε το 2ο θεώρημα διαμέσων:

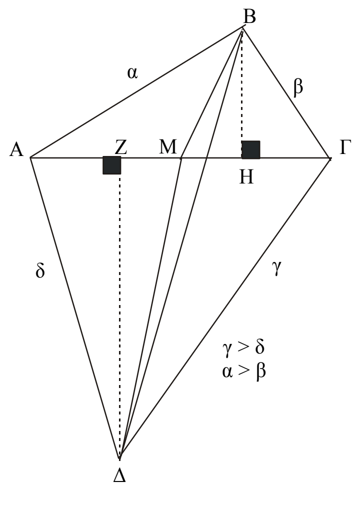
$\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma$: $\alpha^2 - \beta^2 = 2\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{MH}$ (1)

$\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta$: $\gamma^2 - \delta^2 = 2\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{MZ}$ (2)

Προσθέτοντας τις (1), (2) έχουμε:

$(\alpha^2 - \beta^2) + (\gamma^2 - \delta^2) = 2\mathrm{A\Gamma}\ (\mathrm{MH} + \mathrm{MZ})$ ή

$(\alpha^2 - \beta^2) + (\gamma^2 - \delta^2) = 2\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{ZH}$



43. $16\,(\mu_\alpha^2\,\mu_\beta^2 + \mu_\beta^2\,\mu_\gamma^2 + \mu_\alpha^2\,\mu_\gamma^2) = \ldots$ (με αντικατάσταση και πράξεις) =

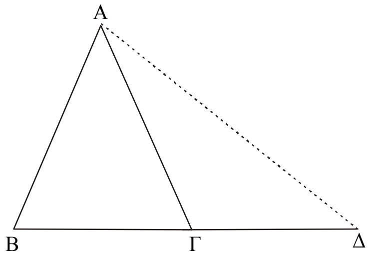
$9\,(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)$

44. Με εφαρμογή του 1ου θεωρήματος διαμέσων στο $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Delta$ έχουμε:

$$\mathrm{A}\Delta^2 + \mathrm{AB}^2 = 2\mathrm{A}\Gamma^2 + \frac{\mathrm{B}\Delta^2}{2}$$

$$\mathrm{A}\Delta^2 = 2\mathrm{A}\Gamma^2 - \mathrm{AB}^2 + \frac{\mathrm{B}\Delta^2}{2} =$$

$$\mathrm{A}\Gamma^2 + \frac{(2\mathrm{B}\Gamma)^2}{2} = \mathrm{A}\Gamma^2 + \frac{4\mathrm{B}\Gamma^2}{2} = \mathrm{A}\Gamma^2 + 2\mathrm{B}\Gamma^2$$

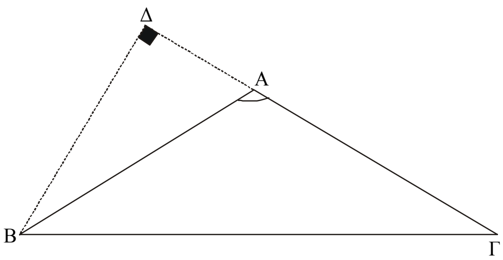


45. Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma$:

$$\mathrm{B}\Gamma^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A}\Gamma^2 + 2\mathrm{A}\Gamma\cdot\mathrm{A}\Delta =$$

$$2\mathrm{A}\Gamma^2 + 2\mathrm{A}\Gamma\cdot\mathrm{A}\Delta =$$

$$2\mathrm{A}\Gamma\,(\mathrm{A}\Gamma + \mathrm{A}\Delta) = 2\mathrm{A}\Gamma\cdot\Delta\Gamma$$



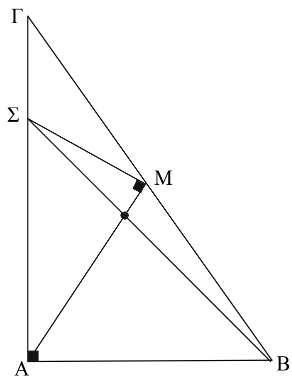
46. Στο $\Gamma\overset{\Delta}{\Sigma}\mathrm{B}$ εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα διαμέσων:

$$\Sigma\mathrm{B}^2 + \Sigma\Gamma^2 = 2\Sigma\mathrm{M}^2 + \frac{\mathrm{B}\Gamma^2}{2} =$$

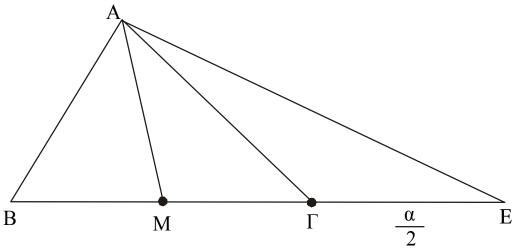
$$2\Sigma\mathrm{M}^2 + \frac{(2\mathrm{AM})^2}{2} = 2\Sigma\mathrm{M}^2 + 2\mathrm{AM}^2 =$$

$$2\,(\Sigma\mathrm{M}^2 + \mathrm{AM}^2) = 2\Sigma\mathrm{A}^2$$

(γιατί το $\Sigma\overset{\Delta}{\mathrm{M}}\mathrm{A}$ είναι ορθογώνιο στο Μ)



47. Εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα διαμέσων στο $\overset{\Delta}{\text{ΑΜΕ}}$, στο οποίο η ΑΓ είναι διάμεσος και έχουμε:



$$ΑΕ^2 + ΑΜ^2 = 2ΑΓ^2 + \frac{ΜΕ^2}{2}$$

$$ΑΕ^2 = 2\beta^2 - \mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \quad (1)$$

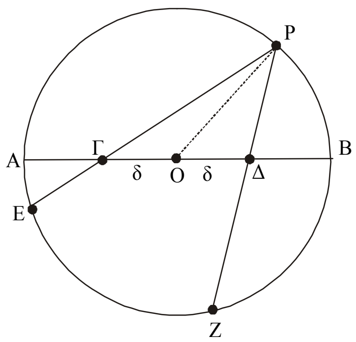
Από την εφαρμογή του 1ου θεωρήματος διαμέσων στο $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ έχουμε:

$$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2ΑΜ^2 + \frac{ΒΓ^2}{2} \text{ ή } \gamma^2 + \beta^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \text{ ή } \frac{\alpha^2}{2} = \beta^2 + \gamma^2 - 2\mu_\alpha^2 \quad (2)$$

Η σχέση (1) βάσει της (2) γίνεται:

$$ΑΕ^2 = 2\beta^2 - \mu_\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\mu_\alpha^2 \text{ ή } ΑΕ^2 = 3\beta^2 + \gamma^2 - 3\mu_\alpha^2$$

48. i. Ισχύει: $ΔΖ \cdot ΔΡ = ΔΒ \cdot ΔΑ = (R - \delta)(R + \delta) = R^2 - \delta^2$



Άρα $ΔΖ \cdot ΔΡ = R^2 - \delta^2$ ή $ΔΖ = \dfrac{R^2 - \delta^2}{ΔΡ}$ (1)

Ομοίως $ΓΕ \cdot ΓΡ = ΑΓ \cdot ΓΒ = (R - \delta)(R + \delta) = R^2 - \delta^2$

Άρα $ΓΕ \cdot ΓΡ = R^2 - \delta^2$ ή $ΓΕ = \dfrac{R^2 - \delta^2}{ΓΡ}$ (2)

ii. Από τις (1), (2) έχουμε:

$$\frac{ΓΡ}{ΓΕ} + \frac{ΔΡ}{ΔΖ} = \frac{ΓΡ}{\frac{R^2 - \delta^2}{ΓΡ}} + \frac{ΔΡ}{\frac{R^2 - \delta^2}{ΔΡ}} = \frac{ΓΡ^2}{R^2 - \delta^2} + \frac{ΔΡ^2}{R^2 - \delta^2} =$$

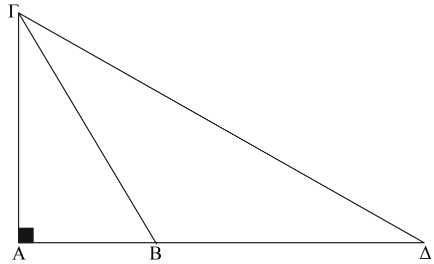
$$\frac{ΓΡ^2 + ΔΡ^2}{R^2 - \delta^2} = \frac{2ΟΡ^2 + \frac{ΓΔ^2}{2}}{R^2 - \delta^2} = \frac{2R^2 + 2\delta^2}{R^2 - \delta^2} = \text{σταθ.}$$

49. Με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΓΒΔ έχουμε:

$\Gamma\Delta^2 = \Gamma B^2 + B\Delta^2 + 2\Delta B \cdot AB =$

$2\Gamma B^2 + 2\Gamma B \cdot AB = 2\Gamma B\,(\Gamma B + AB) =$

$2\Gamma B\,(B\Delta + AB) = 2\Gamma B \cdot A\Delta$



50. i. Με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος στο $A\overset{\Delta}{B}\Delta$ έχουμε:

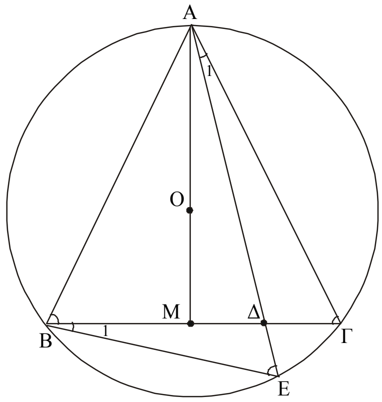
$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 - 2B\Delta \cdot M\Delta$

$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta\,(B\Delta - 2M\Delta)$ (1)

Αλλά:

$B\Delta - 2M\Delta = B\Delta - M\Delta - M\Delta =$

$\dfrac{B\Gamma}{2} - M\Delta = \Delta\Gamma$ (2)



Από (1) και (2) έχουμε: $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ (3)

Αλλά $A\Delta \cdot \Delta E = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ (4)

Από (3) και (4) έχουμε: $AB^2 = A\Delta^2 + A\Delta \cdot \Delta E = A\Delta\,(A\Delta + \Delta E) = A\Delta \cdot AE$

ii. Από τα Β, Δ, Ε περνά ένας κύκλος και το σημείο Α είναι εξωτερικό του σημείο. Από τη σχέση $AB^2 = A\Delta \cdot AE$ έχουμε ότι το ΑΒ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο που ορίζεται από τα σημεία Δ, Ε, Β.

51. Ισχύει $ΑΓ \cdot ΓΒ = ΓΕ \cdot ΓΖ$ (1)

Αλλά $ΑΓ = 3ΓΒ$

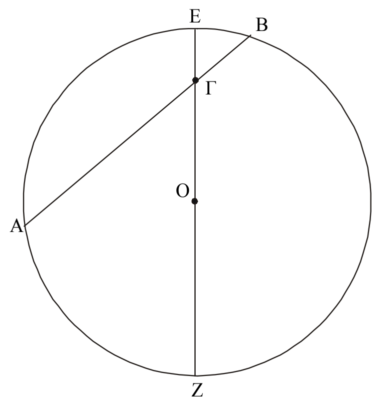
$ΓΕ = ΕΟ - ΓΟ = 15 - 10 = 5$ cm

$ΓΖ = ΓΟ + ΟΖ = 10 + 15 = 25$ cm

Η σχέση (1) βάσει των παραπάνω γίνεται:

$3ΓΒ \cdot ΓΒ = 5 \cdot 25$ ή $3ΓΒ^2 = 125$ ή

$ΓΒ = \sqrt{\frac{125}{3}}$



Αλλά $ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ$. Άρα $ΑΒ = 4ΓΒ$ ή $ΑΒ = 4\sqrt{\frac{125}{3}}$ cm

52. i. $Ρ\overset{\Delta}{Α}Β \approx Ρ\overset{\Delta}{Γ}Α$ (1) γιατί

$Ρ\hat{Α}Γ = Α\hat{Β}Γ$ (υπό χορδής και εφαπτομένης)

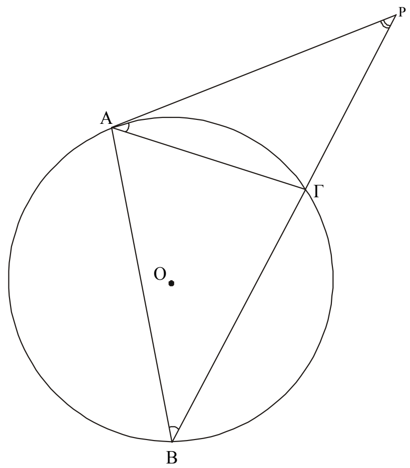
$\hat{Ρ} = \hat{Ρ}$ (κοινή)

Άρα ισχύει η (1)

ii. Από την ομοιότητα έχουμε:

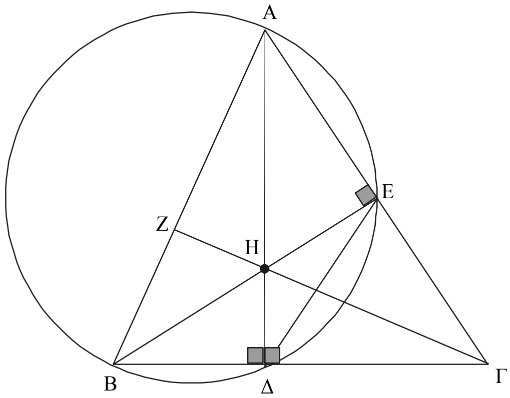
$\frac{ΡΒ}{ΡΑ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΡΑ}{ΡΓ}$ άρα

$ΡΑ^2 = ΡΒ \cdot ΡΓ$



Τότε: $\left(\frac{ΑΒ}{ΑΓ}\right)^2 = \left(\frac{ΡΒ}{ΡΑ}\right)^2 = \frac{ΡΒ^2}{ΡΑ^2} = \frac{ΡΒ^2}{ΡΒ \cdot ΡΓ} = \frac{ΡΒ}{ΡΓ}$

53. i. Θα δείξουμε ότι το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο σε κύκλο (1). Η πλευρά ΑΒ φαίνεται από τα Δ, Ε με γωνία ορθή. Άρα ισχύει η (1). Ομοίως τα ΑΖΗΕ, ΖΗΔΒ είναι εγγράψιμα σε κύκλο.



ii. Θα δείξουμε ότι

$AB^2 = BHBE + AH \cdot A\Delta$

Αφού από τα τετράπλευρα ΑΖΗΕ, ΖΗΔΒ περνά κύκλος ισχύει:

$BH \cdot BE = BZ \cdot AB$, $AH \cdot A\Delta = AZ \cdot AB$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις και έχουμε:

$BH \cdot BE + AH \cdot A\Delta = (BZ + AZ)\ AB$ ή $BH \cdot BE + AH \cdot A\Delta = AB^2$

54. Ισχύει $\Gamma E^2 = \Gamma B \cdot \Gamma Z$

$(2\alpha)^2 = \alpha \cdot \Gamma Z$ ή $\Gamma Z = 4\alpha$

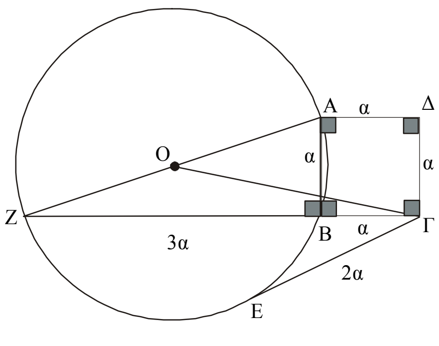
Αλλά $ZB = \Gamma Z - B\Gamma = 4\alpha - \alpha = 3\alpha$

Το $A\overset{\Delta}{B}Z$ ορθογώνιο:

$(2R)^2 = ZB^2 + BA^2$ ή

$4R^2 = (3\alpha)^2 + \alpha^2$ ή $4R^2 = 9\alpha^2 + \alpha^2$ ή

$R = \sqrt{\dfrac{5}{2}}\,\alpha$ ή $R = \dfrac{\sqrt{10}}{2}\,\alpha$



55. ΡΑ = 9 cm, ΡΒ = 10 cm, ΡΓ = 15 cm

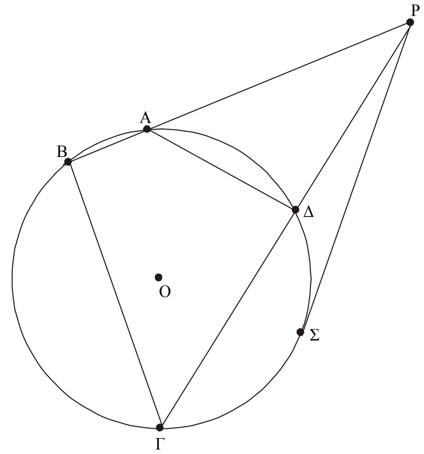
Ισχύει: ΡΑ·ΡΒ = ΡΔ·ΡΓ

9·10 = ΡΔ·15 ή ΡΔ = 6 cm

$Ρ\Sigma^2 = ΡΔ \cdot ΡΓ$

$Ρ\Sigma^2 = 6 \cdot 15$

$Ρ\Sigma = \sqrt{9 \cdot 10} = 3\sqrt{10}$ cm



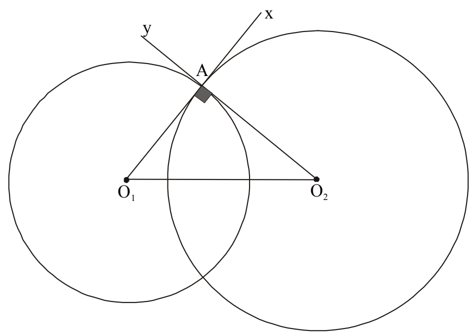
56. i. Έστω (O_1, R_1), (O_2, R_2) οι δύο κύκλοι

$x\hat{A}y = 90°$, άρα $O_1 \overset{\Delta}{A} O_2$ ορθογώνιο

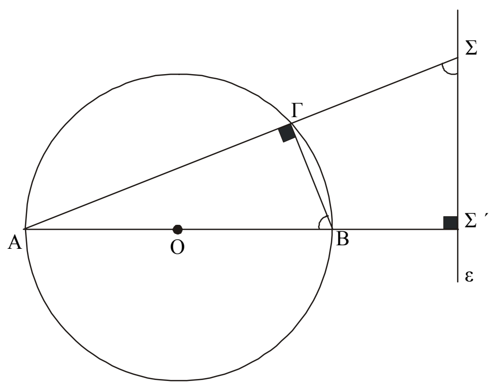
$(O_1O_2)^2 = (O_1A)^2 + (O_2A)^2$ ή

$(O_1O_2)^2 = R_1^2 + R_2^2$ (1)

ii. $\Delta^{O_1}_{(O_2, R_2)} = (O_1O_2)^2 - R_2^2 \overset{(1)}{=} R_1^2$



57. Το τετράπλευρο ΒΓΣΣ΄ είναι εγγράψιμο ($\hat{Γ} = \hat{\Sigma}΄ = 1L$) σε κύκλο, άρα ΑΓ·ΑΣ = ΑΒ·ΑΣ΄. Αφού η ε σταθερή και ο κύκλος (Ο, $\frac{AB}{2}$) σταθερός, το γινόμενο ΑΒ·ΑΣ΄ είναι σταθερό: ΑΓ·ΑΣ = ΑΒ·ΑΣ΄ = σταθερό.



58. Θα δείξουμε: $ΡΒ^2 = ΡΓ^2 + ΒΓ \cdot ΒΔ$ (1)

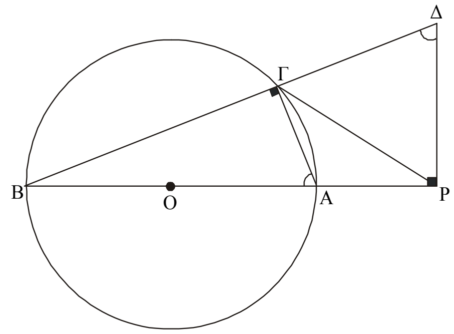
$ΡΓ^2 = ΡΑ \cdot ΡΒ$ ως εφαπτομένη στον (Ο, R)

Από την (1) έχουμε:

$ΡΒ^2 - ΡΓ^2 = ΡΒ^2 - ΡΑ \cdot ΡΒ =$

$ΡΒ (ΡΒ - ΡΑ) = ΡΒ \cdot ΑΒ$ (2)

Αλλά ισχύει $ΡΒ \cdot ΑΒ = ΒΓ \cdot ΒΔ$, γιατί το ΑΓΔΡ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

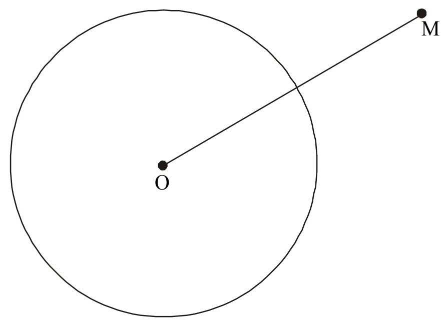


Άρα η (2) γίνεται: $ΡΒ^2 - ΡΓ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$ ή $ΡΒ^2 = ΡΓ^2 + ΒΓ \cdot ΒΔ$

59. Για κάθε σημείο Μ έτσι ώστε

$ΜΟ = δ$ ισχύει $Δ^{Μ}_{(Ο, R)} = = ΟΜ^2 - R^2 =$

$δ^2 - R^2 =$ σταθερό, $δ > R$.



60. Θα δείξουμε: $ΑΕ \cdot ΕΒ + 2ΟΖ^2 = R^2$

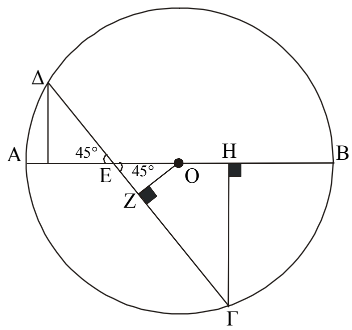
Ισχύει $ΑΕ \cdot ΕΒ = R^2 - ΟΕ^2$ ή

$ΑΕ \cdot ΕΒ + ΟΕ^2 = R^2$ (1)

Αλλά το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΕΖΟ}$

($\hat{Ζ} = 90°$) είναι και ισοσκελές, άρα ΕΖ = ΖΟ.

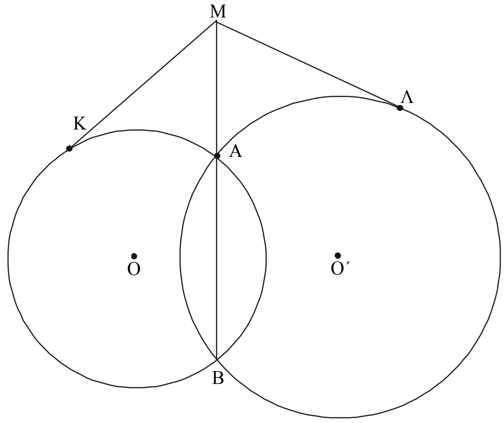
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:



$ΟΕ^2 = ΕΖ^2 + ΖΟ^2 = 2ΖΟ^2$. Άρα η σχέση (1) γίνεται: $ΑΕ \cdot ΕΒ + 2ΖΟ^2 = R^2$

61. Έστω (Ο, R), (Ο΄, R΄) οι δύο κύκλοι και ΜΑΒ η κοινή τέμνουσα των δύο κύκλων. Τότε $ΜΚ^2 = ΜΑ \cdot ΜΒ$ και $ΜΛ^2 = ΜΑ \cdot ΜΒ$

Άρα ΜΚ = ΜΛ.



62. i. Ισχύει: $ΑΜ \cdot ΜΕ = ΒΜ \cdot ΜΓ = \frac{α^2}{4}$,

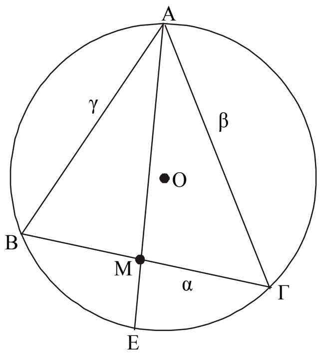
(αφού $ΒΜ = ΜΓ = \frac{α}{2}$)

ii. Θεώρημα διαμέσων στο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$:

$β^2 + γ^2 = 2μ_α^2 + \frac{α^2}{2}$ (1) ή

$2(β^2 + γ^2) = 4μ_α^2 + α^2$ ή $α^2 = 2(β^2 + γ^2) - 4μ_α^2$

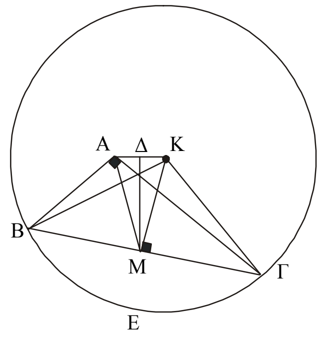
Από (i) έχουμε: $ΑΜ \cdot ΜΕ = \frac{α^2}{4} = \frac{2(β^2 + γ^2) - 4μ_α^2}{4} = \frac{β^2 + γ^2}{2} - μ_α^2$



63. i. Πρέπει να δείξουμε ότι: $AM^2 + MK^2 = R^2$

Αφού ΒΜ = ΜΓ, ΚΒ = ΚΓ, τότε $KM \perp B\Gamma$

Είναι $AM = \dfrac{B\Gamma}{2}$ γιατί $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ ορθογώνιο στην $\hat{A}$.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο $K\overset{\Delta}{M}\Gamma$ έχουμε:

$MK^2 + M\Gamma^2 = R^2$ ή

$MK^2 + \left(\dfrac{B\Gamma}{2}\right)^2 = R^2$ ή $MK^2 + AM^2 = R^2$ (1)

ii. Εφαρμόζουμε το θεώρημα διαμέσων στο $A\overset{\Delta}{M}K$:

$AM^2 + KM^2 = 2\Delta M^2 + \dfrac{AK^2}{2}$ (ΑΚ σταθερό) (2)

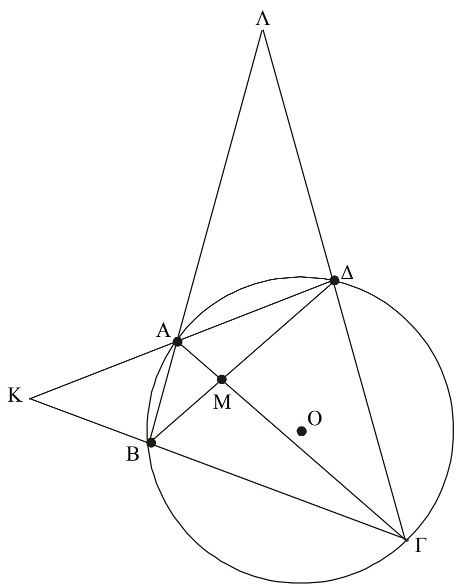
Από (1) και (2) έχουμε: $R^2 - \dfrac{AK^2}{2} = 2\Delta M^2$ ή $\Delta M = \sqrt{\dfrac{R^2}{2} - \dfrac{AK^2}{4}}$ = σταθερό

64. Το ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. Οι προεκτάσεις των ΑΒ, ΔΓ τέμνονται στο Λ, οι προεκτάσεις των ΑΔ, ΒΓ στο Κ, καθώς και οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΓ, ΒΔ στο Μ. Έτσι οι δυνατές σχέσεις που συνδέουν τις αποστάσεις των σημείων τομής από τα Α, Β, Γ, Δ είναι οι παρακάτω:

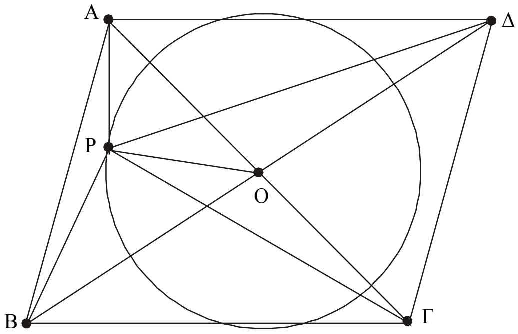
α) $MA \cdot M\Gamma = MB \cdot M\Delta$

β) $KA \cdot K\Delta = KB \cdot K\Gamma$

γ) $\Lambda A \cdot \Lambda B = \Lambda\Delta \cdot \Lambda\Gamma$



65. Εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα διαμέσων στα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{P B \Delta}}$, $\overset{\Delta}{\mathrm{P A \Gamma}}$ και έχουμε:



$$\mathrm{PB}^2 + \mathrm{P\Delta}^2 = 2\mathrm{PO}^2 + \frac{\mathrm{B\Delta}^2}{2} \quad (1)$$

$$\mathrm{PA}^2 + \mathrm{P\Gamma}^2 = 2\mathrm{PO}^2 + \frac{\mathrm{A\Gamma}^2}{2} \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2): $\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{P\Gamma}^2 + \mathrm{P\Delta}^2 =$

$4\mathrm{PO}^2 + \dfrac{\mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{B\Delta}^2}{2} = 4\mathrm{R}^2 + \dfrac{\mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{B\Delta}^2}{2} =$ σταθερό, αφού οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ του παραλληλογράμμου είναι σταθερά ευθύγραμμα τμήματα.