

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  με  $AB=2BΓ$ . Φέρνουμε το  $AE \perp BΓ$  και έστω  $Z, H$  τα μέσα των  $ΔΓ$  και  $AB$  αντίστοιχα. Ν.δ.ο.

α) το  $ZΓΒΗ$  είναι ρόμβος (9 μον.) β)  $HZ=HE$  (8 μον.)

γ) η  $EZ$  είναι διχοτόμος της  $H\hat{E}Γ$  (8 μον.)

### ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 15<sup>ο</sup>

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

A. Ν.δ.ο. η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας (13 μον.)

B. α) Δώστε τον ορισμό του ρόμβου (4 μον.)

β) Ν.δ.ο. οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα (8 μον.)

#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται γωνία  $ΧΟΨ$ , η διχοτόμος της  $Οδ$  και  $M, N$  σημεία της  $Οδ$  ώστε  $OM < ON$ .

Πάνω στις πλευρές  $Οχ$  και  $Οψ$  θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία  $A, B$  ώστε  $OA=OB$ .

Ν.δ.ο. α)  $AM=BM$  (10 μον.) β)  $\text{τρίγ.}AMN=\text{τρίγ.}BMN$  (15 μον.)

#### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $ABΓ$  και  $Δ, E$  τα μέσα των  $ΑΓ, AB$  αντίστοιχα. Προεκτείνουμε το  $BΔ$  κατά  $ΔZ=BΔ$  και το  $ΓE$  κατά  $EH=ΓE$ . Ν.δ.ο.

α) το  $HAΓB$  είναι παραλληλόγραμμο (12 μον.) β)  $AH=AZ$  (13 μον.)

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και  $M$  το μέσο της  $ΓΔ$ . Στην προέκταση του  $OM$  παίρνουμε το  $MN=OM$ , όπου  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων. Ν.δ.ο.

α)  $OM=AΔ/2$  (8 μον.) β) το  $ΔΟΓN$  είναι παραλληλόγραμμο (8 μον.)

γ)  $2KM=AK$ . όπου  $K$  το σημείο τομής της  $AM$  με τη  $BΔ$  (9 μον.)

### ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 16<sup>ο</sup>

**Θ Ε Μ Α 1°**

A. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος. **(Μονάδες 10)**

B. Ποια η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας ; **(Μονάδες 6)**

Γ. Τι ονομάζεται διάμεσος τραπεζίου και να αναφέρετε δύο ιδιότητές της. **(Μονάδες 9)**

**Θ Ε Μ Α 2°**

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές AB=6 , AG=8 και

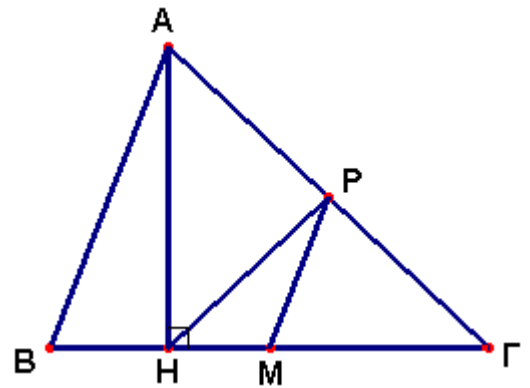
$\hat{B} = 60^\circ$ . Έστω AH ύψος του και M, P τα μέσα των πλευρών BΓ και AG αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

α) Τα μήκη των τμημάτων HP και MP.

**(Μονάδες 10)**

β) Το μήκος του τμήματος BH. **(Μονάδες 8)**

γ) Την γωνία PMΓ. **(Μονάδες 7)**

**Θ Ε Μ Α 3°**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB=AG) και K,Λ

τα μέσα των πλευρών του AB και AG αντίστοιχα.

Στο K φέρνουμε κάθετη στην AB που τέμνει την

ευθεία BΓ στο Δ και στο Λ φέρνουμε κάθετη

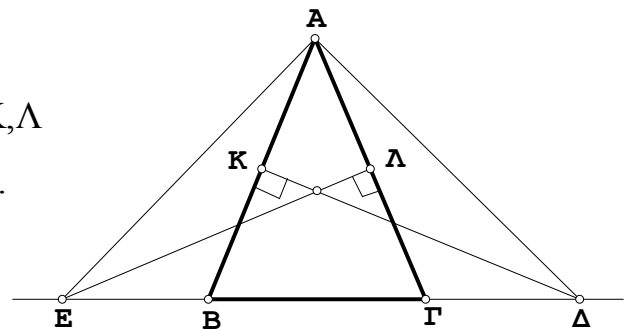
στην AG που τέμνει την ευθεία BΓ στο E.

Να δείξετε ότι:

α)  $K\Delta = E\Lambda$ .

β)  $EB = \Delta\Gamma$ .

γ) Δείξτε ότι το τρίγωνο AΕΔ είναι ισοσκελές.



**(Μονάδες 8)**

**(Μονάδες 9)**

**(Μονάδες 8)**

**Θ Ε Μ Α 4°**

Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ ενός τριγώνου ΑΒΓ κατά τμήματα  $ΑΔ = ΑΒ$  και  $ΑΕ = ΑΓ$

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι ΔΕΒΓ παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)
- γ) Βρείτε μια συνθήκη για το τρίγωνο ΑΒΓ έτσι ώστε το ΔΕΒΓ να είναι ορθογώνιο. (εξηγήστε) (Μονάδες 5)
- δ) Βρείτε μια συνθήκη για το τρίγωνο ΑΒΓ έτσι ώστε το ΔΕΒΓ να είναι ρόμβος. (εξηγήστε) (Μονάδες 5)

### ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 17<sup>0</sup>

#### ΘΕΜΑ 1<sup>0</sup>

- A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου ισούται με  $180^0$  (Μονάδες 15)
- B. Τι ονομάζουμε τραπέζιο και πότε αυτό λέγεται ισοσκελές (Μονάδες 5)
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- 1) Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $\hat{A} = 90^\circ$  η διάμεσος ΑΜ είναι ίση με την ΑΒ τότε  $\hat{B} = 30^\circ$
- 2) Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι και μεταξύ τους κάθετες
- 3) Η διχοτόμος μιας γωνίας της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι πάντοτε ύψος και διάμεσος.
- 4) Αν δύο κύκλοι με ακτίνες R και ρ εφάπτονται εξωτερικά τότε η διάκεντρος ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους  $R + \rho$
- 5) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι διπλάσια της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο με την εγγεγραμμένη. (Μονάδες 5)

#### ΘΕΜΑ 2<sup>0</sup>

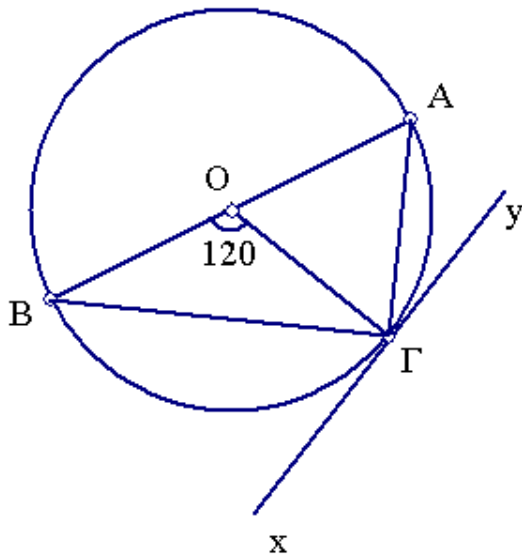
Έστω  $ΑΒΓΔ$  παραλληλόγραμμο με  $\widehat{ΒΑΔ} = 120^\circ$ . Η διχοτόμος της  $\widehat{ΑΔΓ}$  τέμνει την  $ΑΒ$  στο μέσο της  $Ε$ . Φέρνουμε  $ΕΖ$  κάθετη στην  $ΓΔ$  με  $Z$  πάνω στην  $ΓΔ$ .

- Α) Να υπολογιστεί η  $\widehat{ΑΔΓ}$  (Μονάδες 5)  
 Β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ΑΔΕ$  είναι ισοσκελές (Μονάδες 5)  
 Γ) Να αποδείξετε ότι  $ΑΒ = 2 ΒΓ$  (Μονάδες 8)  
 Δ) Να αποδείξετε ότι  $ΔΕ = 2 ΕΖ$  (Μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

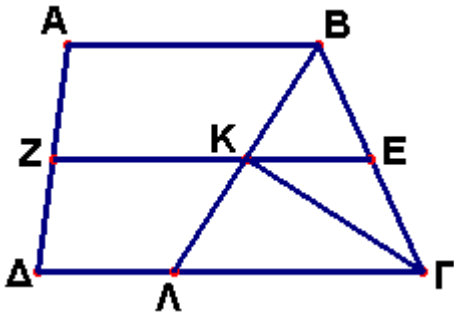
Α. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένας κύκλος  $(Ο, R)$ ,  $xy$  είναι μία εφαπτομένη του στο

σημείο  $Γ$ ,  $ΑΒ$  μια διάμετρος του και η γωνία  $\widehat{ΒΟΓ}$  ισούται με  $120^\circ$ .



- α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών  $\widehat{ΒΓx}$ ,  $\widehat{ΑΓy}$  και  $\widehat{ΑΓΒ}$ . (Μονάδες 8)  
 β) Να υπολογίσετε το μέτρο των τόξων  $ΑΓ$  και  $ΒΓ$  (Μονάδες 8)  
 γ) Να αποδείξετε ότι  $ΑΓ=R$ . (Μονάδες 9)

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>



Στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ), η διχοτόμος ΒΛ της γωνίας  $\hat{B}=120^\circ$ , τέμνει τη διάμεσο ΕΖ στο Κ.

Να αποδείξετε ότι :

α. το Κ είναι μέσον του ΒΛ. (Μονάδες 5)

β.  $ΚΕ = \frac{\Gamma\Lambda}{2}$  (Μονάδες 5) γ.  $ΖΚ = \frac{\Delta\Lambda + ΑΒ}{2}$ . (Μονάδες 5)

δ.  $\hat{ΒΚΓ} = 90^\circ$ . (Μονάδες 5) ε. το τρίγωνο ΒΛΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 5)

### ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 18<sup>ο</sup>

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

Α. Να αποδείξετε ότι, η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. (Μονάδες 12)

Β. Να δώσετε τον ορισμό του ισοσκελούς τραπέζιου και να αναφέρετε δύο ιδιότητές του. (Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Όλες οι πλευρές ενός ρόμβου είναι ίσες μεταξύ τους (Μονάδες 2)

β. Μια ευθεία λέγεται μεσοκάθετος ενός τμήματος ΑΒ, όταν διέρχεται από το μέσον του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 2)

γ. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου, είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου. (Μονάδες 2)

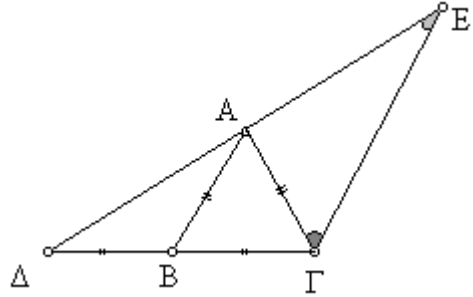
δ. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο, μια γωνία του ισούται με  $60^\circ$ , τότε η απέναντι πλευρά της είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. (Μονάδες 2)

#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Προεκτείνουμε τη  $\Gamma B$  κατά τμήμα  $B\Delta = B\Gamma$  και τη  $\Delta A$  κατά τμήμα  $AE = \Delta A$ .

Να αποδείξετε ότι :

- Το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)
- $AB \parallel \Gamma E$  (Μονάδες 8)
- Το τρίγωνο  $E\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές



(Μονάδες 9)

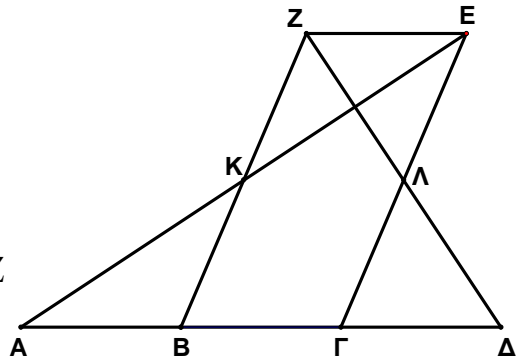
### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Έστω τέσσερα διαδοχικά συνευθειακά σημεία έτσι ώστε  $AB=B\Gamma=\Gamma\Delta$ . Από τα  $B$  και  $\Gamma$  φέρνουμε στο ίδιο ημιεπίπεδο τα παράλληλα τμήματα  $BZ \parallel \Gamma E$  ώστε  $BZ=\Gamma E=2B\Gamma$

(όχι κάθετα στην  $B\Gamma$ ) και ονομάζουμε  $K$  και  $\Lambda$  τα σημεία τομής των  $BZ$  και  $\Gamma E$  με τα τμήματα  $AE$  και  $\Delta Z$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο  $B\Gamma E Z$  είναι παραλληλόγραμμο (Μονάδες 8)
- Τα  $K$  και  $\Lambda$  είναι μέσα των τμημάτων  $AE$  και  $\Delta Z$  (Μονάδες 8)
- Τα τμήματα  $AE$  και  $\Delta Z$  είναι κάθετα μεταξύ τους



(Μονάδες 9)

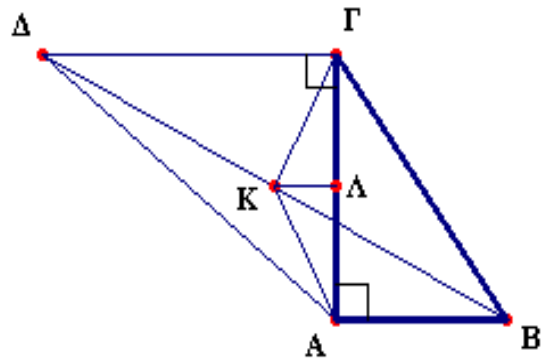
### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  του διπλανού σχήματος, είναι ορθογώνιο ( $\hat{A} = 90^\circ$ ).

Δίνονται ακόμη : 1)  $\Gamma\Delta \perp A\Gamma$  2)  $\Gamma\Delta = B\Gamma$  3)  $K$  μέσο του  $B\Delta$  4)  $\Lambda$  μέσο του  $A\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι :

- Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο
- $K\Lambda = \frac{B\Gamma - AB}{2}$
- $K\Lambda \perp A\Gamma$
- Το τρίγωνο  $K\Lambda\Gamma$  είναι ισοσκελές
- Οι γωνίες  $\hat{K}\Lambda B$  και  $\hat{K}\Gamma\Delta$  είναι παραπληρωματικές (Μονάδες  $5 \times 5 = 25$ )



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 19<sup>ο</sup> (προτεινόμενα)ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι , η διάμεσος τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας. **(Μονάδες 12)**

**B.** Να δώσετε τον ορισμό του ισοσκελούς τραπεζίου και να αναφέρετε δύο ιδιότητές του . **(Μονάδες 5)**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Δύο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές , όταν έχουν άθροισμα  $90^\circ$  .

**(Μονάδες 1)**

**β.** Μια ευθεία λέγεται μεσοκάθετος ενός τμήματος AB, όταν διέρχεται από το μέσον του τμήματος. **(Μονάδες 1)**

**γ.** Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου , είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου . **(Μονάδες 1)**

**δ.** Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο , μια γωνία του ισούται με  $30^\circ$  , τότε η προσκείμενη πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας και αντίστροφα . **(Μονάδες 1)**

**Δ.** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω στο τετράδιό σας , ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις .

**α.** Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν,

όταν .....

**(Μονάδες 1)**

**β.** Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου ,

είναι .....

**(Μονάδες 1)**

**γ.** Η διάμεσος τραπεζίου

είναι .....

**(Μονάδες 1)**

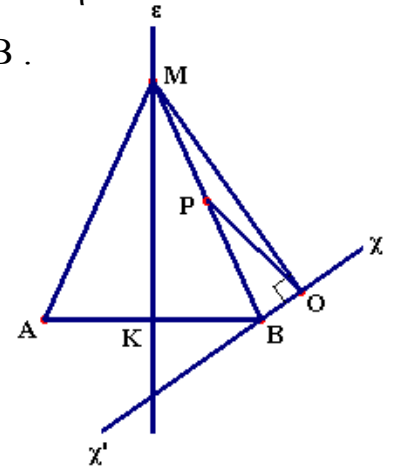
**δ.** Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του ,

είναι .....

**(Μονάδες 1)**

ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Στο διπλανό σχήμα, η ευθεία  $\epsilon$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $AB$  και η  $\chi\chi'$  τυχαία ευθεία που διέρχεται από το  $B$ , έτσι ώστε να μην είναι κάθετη στο τμήμα  $MB$ . Δίνονται ακόμη : 1)  $MO \perp \chi\chi'$  2)  $P$  μέσο του  $MB$ .



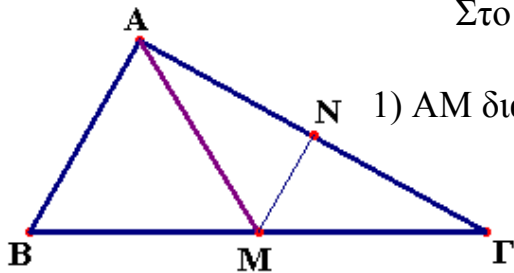
Να αποδείξετε ότι :

α.  $OP = \frac{MB}{2}$  . (Μονάδες 12)

β.  $OP = \frac{MA}{2}$  . (Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του διπλανού σχήματος δίνονται :



1)  $AM$  διάμεσος 2)  $AB = \frac{B\Gamma}{2}$  3)  $\hat{B} = 60^\circ$  4)  $N$  μέσο της  $AG$

Να αποδείξετε ότι :

α. Το τρίγωνο  $ABM$  είναι ισόπλευρο .

β. Το τρίγωνο  $AM\Gamma$  είναι ισοσκελές .

γ. Το τμήμα  $MN$  είναι κάθετο στην  $AG$       δ.  $MN = \frac{B\Gamma}{4}$

ε. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο ( $\hat{A} = 90^\circ$ )      (Μονάδες 25)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  του διπλανού σχήματος, είναι ορθογώνιο ( $\hat{A} = 90^\circ$ ).

Δίνονται ακόμη :

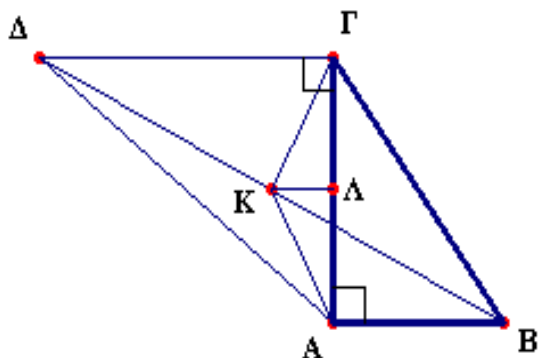
1)  $\Gamma\Delta \perp A\Gamma$  2)  $\Gamma\Delta = B\Gamma$

3)  $K$  μέσο του  $B\Delta$  4)  $\Lambda$  μέσο του  $A\Gamma$  .

Να αποδείξετε ότι :

α. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο .

β.  $K\Lambda = \frac{B\Gamma - AB}{2}$  .



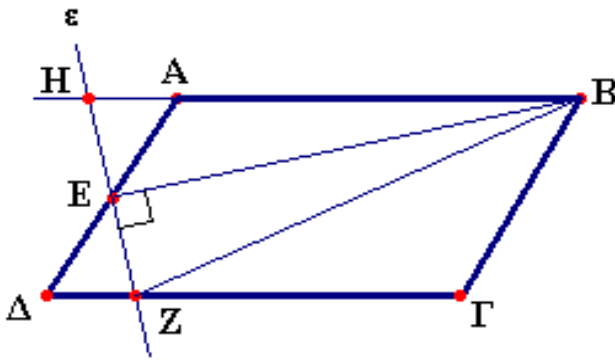
γ.  $K\Lambda \perp A\Gamma$  .

δ. Το τρίγωνο  $K\Lambda\Gamma$  είναι ισοσκελές .



ε. Οι γωνίες  $\hat{K}\hat{A}\hat{B}$  και  $\hat{K}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$  είναι παραπληρωματικές . (Μονάδες 25)

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>



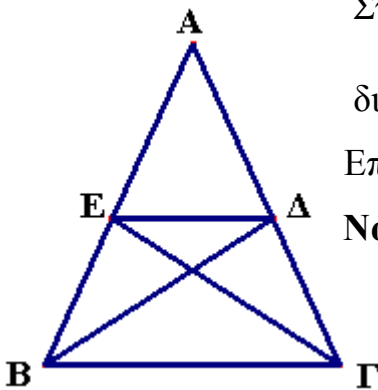
Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο .Δίνονται ακόμη :

- 1) AH προέκταση της πλευράς BA .
- 2) E μέσο της πλευράς AD .
- 3) Η ευθεία ε είναι κάθετη στο τμήμα BE .

Να αποδείξετε ότι :

- α. Τα τρίγωνα ΔEZ και AEH είναι ίσα . (Μονάδες 8)
- β.  $BZ = \square BH$ . (Μονάδες 8)
- γ.  $BZ = \Delta Z + \square \Delta\Gamma$  (Μονάδες 8)

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>



Στο τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος , θεωρούμε τις διχοτόμους BΔ και ΓE των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  αντίστοιχα . Επιπλέον το τμήμα ΔE είναι παράλληλο προς την πλευρά BΓ.

Να αποδείξετε ότι :

- α. Τα τρίγωνα BEΔ και ΓΔE είναι ισοσκελή . (Μονάδες 6)
- β.  $BE = \Gamma\Delta$  . (Μονάδες 6)
- γ. Το τετράπλευρο BΓΔE , είναι ισοσκελές τραπέζιο . (Μονάδες 6)
- δ. Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές . (Μονάδες 7)

**Θ Ε Μ Α 1°**

- A. α)** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου  $AB\Gamma$  ισούται με  $180^\circ$   
(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)
- β)** Να δώσετε τον ορισμό του παραλληλογράμμου και να γράψετε τις ιδιότητές του.  
(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α) Τα τμήματα με μήκη **6,3,9** σχηματίζουν τρίγωνο. (ΜΟΝΑΔΕΣ 2)
- β) Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η διάμεσος  $AM$  είναι ίση με την  $AB$  τότε  $\hat{B} = 30^\circ$  (ΜΟΝΑΔΕΣ 2)
- γ) Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $KAM$  έχουν τις βάσεις τους  $B\Gamma$  και  $AM$  ίσες και  $\hat{B} = \hat{A}$  τότε είναι ίσα (ΜΟΝΑΔΕΣ 2)
- δ) Σε ένα τραπέζιο οι βάσεις του έχουν μήκη **5** και **3** τότε η διάμεσος του ισούται με **4**.  
(ΜΟΝΑΔΕΣ 2)
- ε) Έστω  $(K,R)$  και  $(\Lambda,\rho)$  δυο κύκλοι που εφάπτονται εσωτερικά και  $\delta$  η διάκεντρός τους τότε ισχύει  $\delta=R-\rho$  (ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

**Θ Ε Μ Α 2°**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένας κύκλος  $(O, R)$ ,  $xy$  είναι μία εφαπτομένη του στο σημείο  $\Gamma$ ,  $AB$  μια διάμετρός του και η γωνία  $B\hat{O}\Gamma$  ισούται με  $120^\circ$ :

- α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών  $B\hat{\Gamma}x$ ,  $A\hat{\Gamma}y$  και  $A\hat{\Gamma}B$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)
- β) Να υπολογίσετε το μέτρο των τόξων  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  (ΜΟΝΑΔΕΣ 8)
- γ) Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma=R$ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 9)