

**ΘΕΜΑ 1ο**

A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές .

**Μονάδες 10**

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Αν η διάκεντρος δύο κύκλων είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους , τότε οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά .
- β. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού εξαγώνου .
- γ. Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια οξεία γωνία είναι  $60^\circ$  , τότε η απέναντι κάθετη πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας .
- δ. Τα εφαπτόμενα τμήματα ενός κύκλου που άγονται από σημείο εκτός του κύκλου είναι ίσα μεταξύ τους.
- ε. Τα σημεία της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας .

**Μονάδες 5x3=15**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$  .

Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του

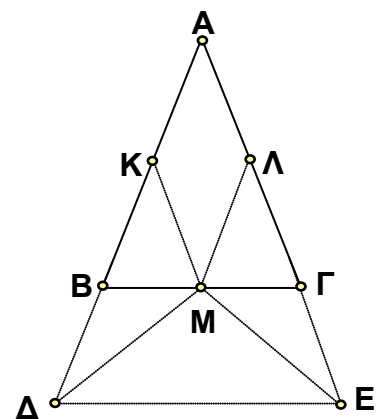
$AB$  και  $AG$  παίρνουμε αντίστοιχα

$$\text{τμήματα } B\Delta = \frac{AB}{2} \text{ και } \Gamma E = \frac{AG}{2} .$$

Αν  $K$  ,  $\Lambda$  και  $M$  είναι τα μέσα των πλευρών

$AB$  ,  $AG$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα , τότε :

- A. Τα τρίγωνα  $KBM$  και  $\Lambda GM$  είναι ίσα .
- B. Το τρίγωνο  $\Delta EM$  είναι ισοσκελές .
- Γ. Το τετράπλευρο  $AKML$  είναι ρόμβος .

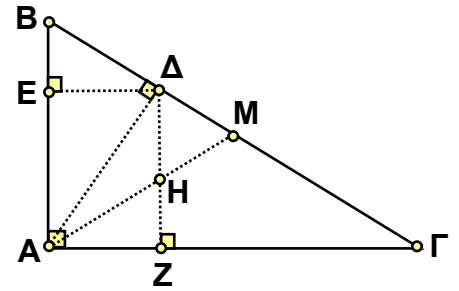


**Μονάδες 8+8+9=25**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $AB < A\Gamma$  φέρνουμε το ύψος  $A\Delta$ , την  $\Delta E$  κάθετη στην  $AB$  και τη  $\Delta Z$  κάθετη στην  $A\Gamma$ . Αν η διάμεσος  $AM$  τέμνει τη  $\Delta Z$  στο  $H$  να αποδείξετε ότι :

- A.  $B\hat{\Delta}E = \hat{\Gamma}$   
 B. τα τρίγωνα  $AHZ$  και  $B\Delta E$  είναι ίσα .  
 Γ. το τετράπλευρο  $BEZH$  είναι παραλληλόγραμμο .  
 Δ. το τετράπλευρο  $AB\Delta H$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.



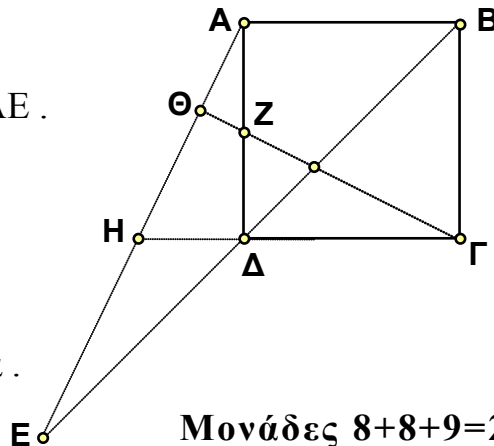
**Μονάδες 6+7+6+6=25**

### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ .

Προεκτείνουμε τη  $B\Delta$  κατά τμήμα  $\Delta E = B\Delta$  και έστω  $H$  το σημείο τομής της  $\Gamma\Delta$  με την  $AE$ .  
 Αν  $Z$  το μέσο της  $A\Delta$  και οι  $\Gamma Z$  και  $AE$  τέμνονται στο  $\Theta$ , να αποδείξετε ότι:

- A.  $\Delta H = AB/2$ .  
 B. Τα τρίγωνα  $A\Delta H$  και  $\Gamma\Delta Z$  είναι ίσα .  
 Γ.  $\Gamma\Theta \perp AE$ .



**Μονάδες 8+8+9=25**

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 10<sup>ο</sup>

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

A. Να αποδείξετε ότι αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές τότε οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.

**Μονάδες 10**

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**Μονάδες 10**

- α. Δυο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις υποτείνουσες ίσες, είναι ίσα.  
 β. Οι διαγώνιες κάθε παραλληλογράμμου είναι ίσες.  
 γ. Κάθε ρόμβος είναι και τετράγωνο.

- δ. Τα εφαπτόμενα τμήματα προς ένα κύκλο από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα.  
 ε. Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι και ύψος του τριγώνου.  
 Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο. **Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται κύκλος κέντρου  $K$  και ένα σημείο  $\Sigma$  στο εξωτερικό του.

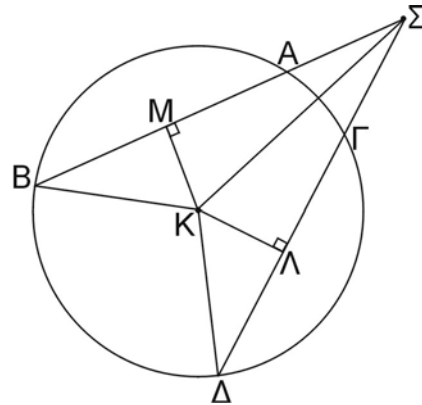
Από το  $\Sigma$  φέρνουμε δύο τέμνουσες  $\Sigma AB$  και  $\Sigma \Gamma \Delta$  τέτοιες ώστε  $\Sigma B = \Sigma \Delta$ .

Αν  $KM \perp \Sigma B$  και  $K\Lambda \perp \Sigma \Delta$  να αποδείξετε ότι :

- i. Τα τρίγωνα  $\Sigma KB$  και  $\Sigma K\Delta$  είναι ίσα και  $\Sigma K$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Sigma$ .

**Μονάδες 13**

- ii.  $KM = K\Lambda$  και  $\Sigma A = \Sigma \Gamma$ . **Μονάδες 12**

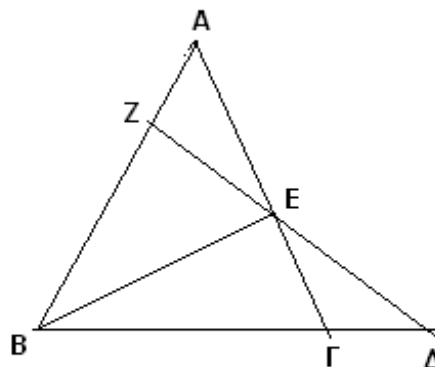
**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>****ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο

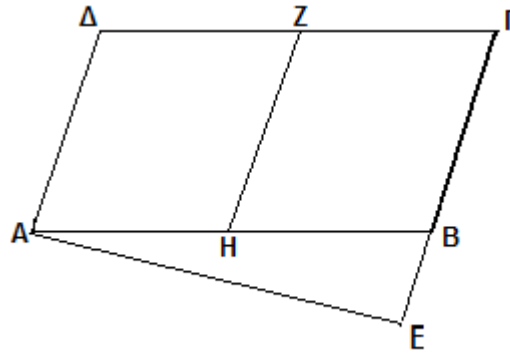
$AB\Gamma$ . Προεκτείνουμε την  $B\Gamma$  (προς το μέρος του  $\Gamma$ ) κατά

τμήμα  $\Gamma\Delta = B\Gamma/2$ . Φέρνουμε το ύψος  $BE$  και έστω  $Z$  το σημείο στο οποίο η  $\Delta E$  τέμνει την  $AB$ . Να αποδείξετε ότι:

- i. Το  $\Gamma\Delta E$  είναι ισοσκελές. **Μον. 8**  
 ii. Το  $\Delta Z$  είναι ορθογώνιο. **Μον. 8**  
 iii.  $BZ = 3/4 B\Gamma$ . **Μον. 9**



Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB=2B\Gamma$ . Φέρνουμε το τμήμα  $AE \perp B\Gamma$  και έστω  $Z, H$  τα μέσα των πλευρών  $\Delta\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:



- i. Το τετράπλευρο  $Z\Gamma BH$  είναι ρόμβος. **Μονάδες 9**
- ii.  $HZ=HE$ . **Μονάδες 8**
- iii. Η  $EZ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $HE\Gamma$ . **Μονάδες 8**

### ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 11<sup>ο</sup>

#### ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

**Μον. 10**

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, είναι και διχοτόμος.

β. Σε κάθε τρίγωνο κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο πλευρών.

γ. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία είναι πάντα ίσα.

δ. Η κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων είναι πάντα μεσοκάθετος της διακέντρου.

ε. Δύο γωνίες που οι πλευρές τους είναι παράλληλες μία προς μία είναι πάντα ίσες.

**Μον.  $5 \times 2 = 10$**

Γ. Τι ονομάζεται τραπέζιο;

**Μονάδες 5**

#### ΘΕΜΑ 2ο

Έστω  $AB\Gamma\Delta$  τετράγωνο. Κατασκευάζουμε στο εσωτερικό του τετραγώνου το ισόπλευρο τρίγωνο  $ABE$ . Έστω  $\Lambda$  η προβολή της κορυφής  $\Delta$  πάνω στην  $AE$ .  
Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $AE\Delta$  και  $BE\Gamma$  είναι ίσα  
β) Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου  $E\Delta\Gamma$ .  
γ)  $AB=2\Delta\Lambda$

Μονάδες  $10+10+5=25$

### ΘΕΜΑ 3ο

Σε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB\parallel\Gamma\Delta$  και  $AB<\Gamma\Delta$ ) η διχοτόμος της γωνίας του  $B$  τέμνει τη διάμεσό του  $EZ$  στο  $H$  και τη  $\Delta\Gamma$  στο εσωτερικό της σημείο  $\Theta$ .

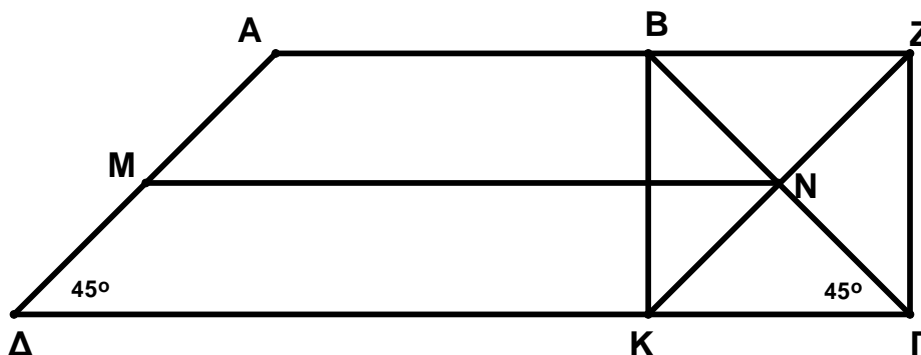
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $\Gamma\Theta B$  είναι ισοσκελές.  
β) Το  $H$  είναι το μέσο του  $B\Theta$ .  
γ) Η  $\Gamma H$  είναι κάθετη στην  $B\Theta$ .

Μονάδες  $10+10+5=25$

### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB\parallel\Gamma\Delta$  και με γωνίες  $\Gamma$  και  $\Delta$  ίσες με  $45^\circ$  η κάθε μία. Έστω  $MN$  διάμεσος τραπέζιου με το σημείο  $M$  στην  $A\Delta$  και το  $N$  στην  $B\Gamma$ . Από το  $N$  φέρνουμε παράλληλη προς την  $A\Delta$  που τέμνει την  $\Gamma\Delta$  στο σημείο  $K$  και την προέκταση της  $AB$  στο  $Z$ .



Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $BZ\Gamma K$  είναι τετράγωνο  
β)  $KB = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$   
γ)  $BK + MN = \Gamma\Delta$

Μονάδες  $15+5+5$

**ΘΕΜΑ 1°**

**A.** Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

**Μονάδες 10**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- i.* Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, είναι και διχοτόμος και ύψος.
- ii.* Η κοινή χορδή δύο ίσων τεμνομένων κύκλων είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.
- iii.* Αν δύο ευθείες παράλληλες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.
- iv.* Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- v.* Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μία κάθετη πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας τότε η απέναντι οξεία γωνία είναι  $30^\circ$ .

**Μονάδες 10**

**Γ.** Πότε ένα τραπέζιο λέγεται ισοσκελές

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 2°**

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$ . Τα

σημεία  $\Delta, E$  είναι μέσα των πλευρών

$A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Αν

$M\Delta \perp A\Gamma$  και  $PE \perp AB$  και  $\Sigma$  το

σημείο τομής των ευθυγράμμων

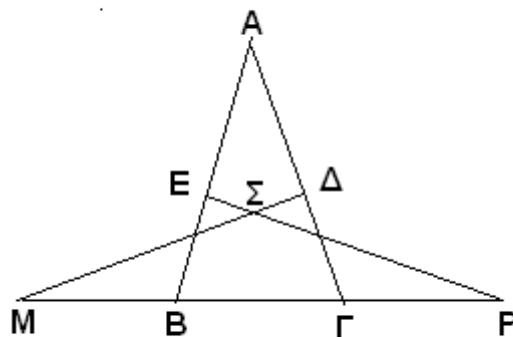
τμημάτων  $M\Delta$  και  $PE$ , να δείξετε ότι:

- i.*  $M\Delta = PE$  **Μονάδες**

**14**

- ii.* το τρίγωνο  $\Sigma MP$  είναι ισοσκελές.

**Μονάδες 11**

**ΘΕΜΑ 3°**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  .

Προεκτείνουμε την πλευρά  $\Gamma B$  κατά τμήμα

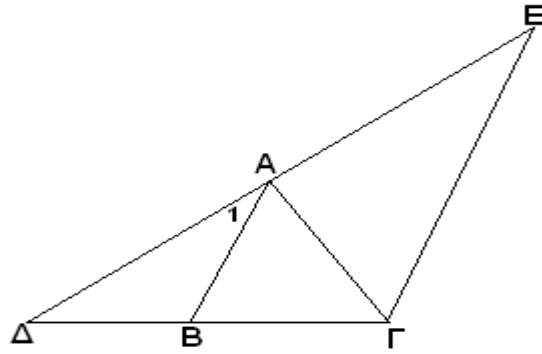
$B\Delta = \Gamma E$  και στην προέκταση του τμήματος

$\Delta A$  θεωρώ σημείο  $E$  ώστε  $AE = \Delta A$  .

i. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{A_1}$  . **Μον. 9**

ii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta \Gamma E$  είναι  
ισοσκελές. **Μον. 8**

Να δείξετε ότι  $AB \parallel \Gamma E$  . **Μον. 8**



#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Θεωρούμε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$ ,  $AB \parallel \Gamma\Delta$  με  $\angle A = \angle \Delta = 90^\circ$ ,  $\Delta\Gamma = 2AB$  και  $B = 3\Gamma$ . Φέρνουμε τη  $BE \perp \Delta\Gamma$ , που τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $K$ , και την  $AE$ , που τέμνει τη  $B\Delta$  στο σημείο  $\Lambda$ . Να αποδείξετε ότι:

- i.  $\Gamma = 45^\circ$  **Μονάδες 8**  
 ii.  $B\Delta = AE$  **Μονάδες 8**  
 iii.  $\Lambda K = 1/4 \Delta\Gamma$ . **Μονάδες 9**

### ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 13<sup>ο</sup>

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

A. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

**Μονάδες 10**

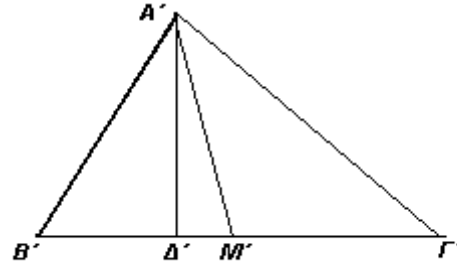
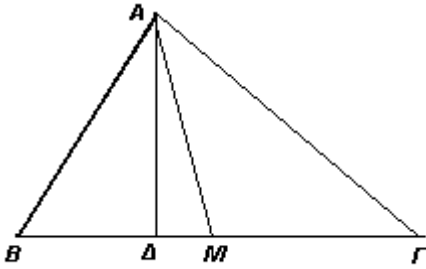
B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. **Μον. 10**

- i. Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δυο παράλληλες ευθείες τότε είναι κάθετη και στην άλλη.
- ii. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
- iii. Αν δυο κύκλοι  $(K, R)$ ,  $(\Lambda, \rho)$  είναι ο ένας εσωτερικός του άλλου με  $R > \rho$  και  $K\Lambda = \delta$  τότε  $\delta = R - \rho$  .
- iv. Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- v. Η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Γ. Τι ονομάζεται ύψος τριγώνου και πως συμβολίζεται;

Μονάδες 5

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>



Στο παραπάνω σχήμα τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν  $B\Gamma = B'\Gamma'$  τα ύψη  $A\Delta = A'\Delta'$  και τις διαμέσους  $AM = A'M'$ . Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα  $AM\Delta$  και  $A'M'\Delta'$  είναι ίσα.
- ii. Τα τρίγωνα  $AM\Gamma$  και  $A'M'\Gamma'$  είναι ίσα.
- iii. Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα.

Μονάδες 8

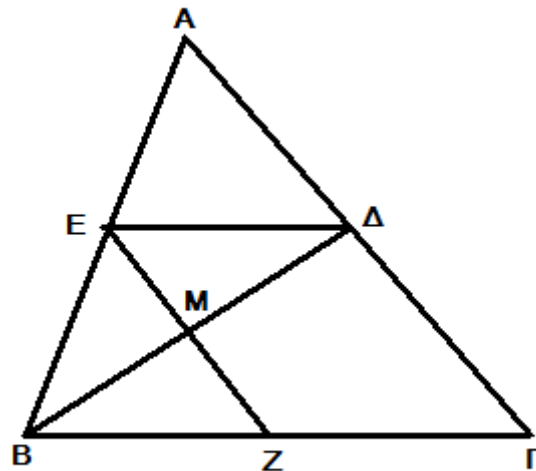
Μονάδες 8

Μονάδες 9

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , η διχοτόμος  $B\Delta$  και  $M$  το μέσο της  $B\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε παράλληλη προς τη  $B\Gamma$  που τέμνει τη  $AB$  στο  $E$ . Αν η  $EM$  τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $Z$  να αποδείξετε ότι:

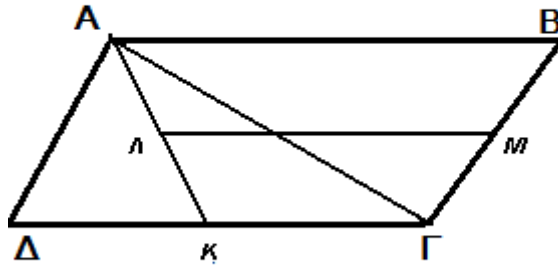
- i. Τα τρίγωνα  $EM\Delta$  και  $BMZ$  είναι ίσα Μονάδες 8
- ii. Το τετράπλευρο  $E\Delta ZB$  είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 8  
Το παραλληλόγραμμο  $E\Delta ZB$  είναι ρόμβος Μονάδες 9



### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>



Στο διπλανό σχήμα το  $ΑΒΓΔ$  είναι παραλληλόγραμμο με  $ΑΒ = 2ΑΔ = 2α$  και η διαγώνιος  $ΑΓ$  είναι κάθετη στη  $ΓΒ$ . Έστω  $Κ$  το μέσο της  $ΓΔ$ ,  $Λ$  το μέσο της  $ΑΚ$  και  $Μ$  το μέσο της  $ΒΓ$ .



*i.* Να αποδείξετε ότι οι  $ΑΚ$  και  $ΒΓ$  δεν είναι παράλληλες και ότι το τετράπλευρο  $ΑΒΓΚ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. **Μονάδες 9**

*ii.* Να υπολογίσετε το  $ΛΜ$  σε συνάρτηση με το  $α$ . **Μονάδες 8**

*iii.* Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου  $ΑΒΓΚ$ . **Μονάδες 8**

### ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 14<sup>ο</sup>

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές (12,5 μον.)  
 B. Σε τρίγωνο  $ΑΒΓ$  είναι  $Β = 2Α$  και  $Γ = 3^Α$ . Να υπολογίσετε τις γωνίες του  $ΑΒΓ$  (12,5 μον.)

#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  ( $Α = 90^\circ$ ) και  $ΑΔ$  το ύψος του. Αν  $Ε, Ζ$  τα μέσα των  $ΑΒ, ΑΓ$  αντίστοιχα, ν.δ.ο.

- α) Τα τρίγωνα  $ΑΔΕ$  και  $ΑΔΖ$  είναι ισοσκελή                      β)  $\hat{ΕΖ} = 90^\circ$

#### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$ . Από τις απέναντι κορυφές  $Α$  και  $Γ$  φέρνουμε κάθετες  $ΑΕ$  και  $ΓΖ$  προς τη διαγώνιο  $ΒΔ$ . Ν.δ.ο.

- α)  $\text{τρίγ.} ΑΔΕ = \text{τρίγ.} ΒΓΖ$     β) το  $ΑΕΓΖ$  είναι παραλληλόγραμμο

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Εσωτερικά ενός τετραγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ.

α) ν.δ.ο. το ΓΔΕ είναι ισοσκελές      β) να υπολογίσετε τις γωνίες του ΓΔΕ

### ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 15<sup>ο</sup>

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

A. Ν.δ.ο. αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές τότε οι που πρόσκεινται σε μία βάση είναι ίσες  
B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

#### **Μονάδες 10**

1. Δύο ορθογώνια που έχουν τις υποτείνουσες ίσες , είναι ίσα
  2. Οι διαγώνιες κάθε παραλληλογράμμου είναι ίσες
  3. Κάθε ρόμβος είναι και τετράγωνο
  4. Τα εφαπτόμενα τμήματα ενός κύκλου από σημείο εκτός αυτού , είναι ίσα
  5. Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι και ύψος αυτού.
- Γ. Να αναφέρετε τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο ( 5 μον.)

#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται κύκλος κέντρου Κ και ένα σημείο Σ εκτός αυτού. Από το Σ φέρνουμε δύο τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΑΔ τέτοιες ώστε ΣΒ=ΣΔ. Αν ΚΜ ⊥ ΣΒ και ΚΛ ⊥ ΣΔ , ν.δ.ο.

- α) τρίγ.ΣΚΒ=τρίγ.ΣΚΔ και ΣΚ διχοτόμος της γωνίας Σ      (13 μον.)  
β) ΚΜ=ΚΛ και ΣΑ=ΣΓ      (12 μον.)

#### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ και προς το μέρος του Γ παίρνουμε το τμήμα ΓΔ=ΒΓ/2. Αν ΖΕ το ύψος του και η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΒ στο Ζ ,

- ν.δ.ο.:
- α) το ΓΔΕ είναι ισοσκελές      ( 8 μον.)  
β) το ΒΔΖ είναι ορθογώνιο      ( 8 μον.)      γ) ΒΖ=3/4ΒΓ      ( 9 μον.)

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>