

80) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 4$ και $B = 2|x| + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} - \sqrt{2}$

α) Να δείξετε ότι $A = |x - 2| - 4$ και $B = 2|x| - 1$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $A = B - 3$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $A + 1 < 0$.

81) Δίνονται οι ευθείες: $\epsilon_1: y = (4 - \lambda^2)x + 4$ και $\epsilon_2: y = (\lambda - 2)x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ευθείες είναι παράλληλες.

β) Αν $\lambda = 1$ να λύσετε το σύστημα των παραπάνω δυο εξισώσεων.

γ) Αν $\lambda = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B στα οποία η ευθεία ϵ_1 τέμνει τους

άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

82) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 6}{-x^2 + 3x - 2}$.

α) Να βρείτε το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να απλοποιηθεί ο τύπος της f.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \leq 3$.

83) Α. Δίνεται η παράσταση $A(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + |10 - 5x| - 18$.

Να αποδείξετε ότι $A(x) = 6|x - 2| - 18$.

Β. i. Να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 0$.

ii. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A(x)$ (να γραφεί χωρίς την απόλυτη τιμή).

84) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$.

Α) Να βρείτε τα α, β έτσι ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από τα σημεία A(-1, -5) και B(2, 4).

Β) Για $\alpha = 3$ και $\beta = -2$

i. Να προσδιορίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ , έτσι ώστε η ευθεία

$y = (\lambda^2 - 1)x + 2009$ να είναι παράλληλη στην γραφική παράσταση της f.

ii. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $g(x) = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{f(x)}}$

85) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = (\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 1$, $\lambda \neq 2$.

α) Για $\lambda = 2$ να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{f(x)}{16x^2 - 8x + 1}$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες

γ) Αν x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να βρείτε το $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε να ισχύει $x_1 + x_2 > \lambda$.

86) Δίνεται η εξίσωση $\chi^2/4 + \kappa\chi + \kappa^2 = 0$ (1).

α) Να βρείτε το κ ώστε η (1) να έχει ρίζα το -4.

β) Ν.δ.ο. για την τιμή του κ που βρήκατε η ρίζα αυτή είναι διπλή.

87) Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{5} - 3$ και $\beta = \sqrt{5} + 3$

α) Να υπολογιστούν οι α^2 και β^2

β) Να απλοποιηθεί η παράσταση $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$.

γ) Αν $K = \frac{\alpha}{\beta}$ να γραφεί το K σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

88) Α) Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $3\chi^2 + \chi - 4$.

Β) Αν $A = \frac{3\chi^2 + \chi - 4}{\chi - \chi^3}$, να απλοποιήστε το A

Γ) Βρείτε τις τιμές του χ αν $A \leq 0$.

89) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας

α) ε_1 που διέρχεται από το σημείο $A(2,3)$ και σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 45° .

β) ε_2 που διέρχεται από το σημείο $B(-1,2)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία $\delta: \psi = 2x - 3$.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

90) Δίνεται η εξίσωση: $\chi^2 - \lambda\chi - \lambda^2 - 5 = 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$ η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές λύσεις

β) Να υπολογιστεί το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της συναρτήσεως του λ .

γ) Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης να βρεθεί το λ όταν ισχύει: $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) = -4$.

91) Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις: $A(x)=3x^2-5x+2$, $B(x)=x^3-3x^2+x-3$, $\Gamma(x) = \frac{A(x) \cdot (x-1)}{B(x)}$.

- α) Να εξετάσετε το πρόσημο της $A(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
 β) Να εξετάσετε το πρόσημο της $B(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
 γ) Για ποιες τιμές του x έχει νόημα η παράσταση $\Gamma(x)$.
 δ) Να λύσετε την ανίσωση $\Gamma(x) \leq 0$.

92) Δίνονται με περιγραφή τα σύνολα: $A = \{x \in \mathbf{N} / |x-1| \leq 2\}$ και $B = \{x \in \mathbf{N} / (x-3) \cdot (x^2 + 2x - 8) = 0\}$.

Να βρείτε με αναγραφή:

- α) Το σύνολο A και το σύνολο B .
 β) Το σύνολο $A \cap B$ και το σύνολο $A \cup B$.

93) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (k-2)x - k + 7 = 0$, $k \in \mathbf{R}$.

- α). Να λυθεί η εξίσωση για $k = 5$.
 β) Για ποια τιμή του k η εξίσωση έχει ρίζα το 2.
 γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να αποδειχθεί ότι $(x_1 + x_2)^2 - x_1 \cdot x_2 + 3 = k^2 - 3k$.

94) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .
 γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \leq 0$.

95) Δίνονται με περιγραφή τα σύνολα: $A = \{x \in \mathbf{Z} / |x-2| \leq 3\}$ και $B = \{x \in \mathbf{Z} / (x-2) \cdot (x^2 - 5x + 4) = 0\}$.

Να βρείτε με αναγραφή:

- α) Το σύνολο A και το σύνολο B .
 β) Το σύνολο $A \cap B$ και το σύνολο $A \cup B$.

96) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

97) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με αντίστοιχες εξισώσεις: $y = |k-2|x+11, k \in R$ και $y = 3x-7$.

α) Να βρείτε το $k \in R$, ώστε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

β) Αν $k = -1$, να εξετάσετε αν η ε_1 διέρχεται από το σημείο $A(-3, 2)$.

γ) Αν η ε_2 τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(\alpha, \beta)$, να βρείτε την απόσταση των $A(-3, 2)$ και B .

98) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^3 + 8}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $3x^2 + 5x - 2$ και $x^3 + 8$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

99) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda^2 - 4, \lambda \in R$, που έχει δύο άνισες ρίζες x_1 και x_2 .

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$.

β) Να βρείτε τα $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$.

γ) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$.

100) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda + 1 = 0, \lambda \in R$.

α) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει ρίζα το 2.

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να ισχύει $x_1 + x_2 > 2(x_1 \cdot x_2)$.

101) Δίνονται οι παραστάσεις $A = |x - 4|$ και $B = |x + 1|$ με $x \in R$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $A = 9$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $B \leq 5$.

γ) Αν $-1 \leq x \leq 4$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A + B$.

102) Δίνονται με περιγραφή τα σύνολα

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / (|x| - 2)(x^2 - 1) = 0\} \text{ και } B = \{x \in \mathbb{Z} / |x - 1| \leq 3\}.$$

1) Να γραφούν τα σύνολα A και B με αναγραφή των στοιχείων τους.

2) Να αποδείξετε ότι $A \subseteq B$.

3) Να γραφεί με αναγραφή η ένωση των συνόλων A, B .

4) Να γραφεί με αναγραφή η τομή των συνόλων A, B .

103) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$ και οι παραστάσεις

$$K = f(2) \cdot f(2 + \sqrt{2}) \cdot f(2 - \sqrt{2}) \text{ και } \Lambda = \frac{f(2)}{f(3) - f(2)} + \frac{f(3)}{f(3) + f(2)}.$$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

B. Να αποδείξετε ότι $K=2$ και $\Lambda=5$.

Γ. Να προσδιορίσετε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $M(\mu-1, \mu^2)$ να ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: y = K \cdot x + \Lambda$.

Δ. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y = (\lambda^{2010} + 1) \cdot x + 2009$

να

είναι παράλληλη με την ευθεία ε .

104) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

A. Αν $\lambda=0$, να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα: $K(x) = \frac{2010 \cdot f(x)}{2x^2 + 9x - 5}$, και

στη συνέχεια να το απλοποιήσετε.

B. Έστω $\lambda \neq 0$. Να δείξετε ότι αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τότε $\lambda < 1$.

Γ. α) Αν $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ και $\lambda < 1$, να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της $f(x) = 0$ ως συνάρτηση του λ .

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης, $f(x) = 0$ να βρείτε για ποιες τιμές του, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ισχύει: $x_1 + x_2 - x_1 x_2 > 0$.

105) Έστω το σημείο $M(\lambda^2 - 7\lambda + 6, |\lambda - 1| - 3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Ποιο το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο M να ανήκει στον θετικό ημιάξονα Oy .

B) Ποιο το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο M να βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο.

Γ) Αν $\lambda=2$ να βρεθούν:

1. Το συμμετρικό του M ως προς τον άξονα $y'y$.

2. Το συμμετρικό του M ως προς την διχοτόμο 1^{ης}-3^{ης} γωνίας των αξόνων, δηλαδή την ευθεία $y=x$.

3. Η απόσταση του M από το σημείο $\Lambda(8, -7)$.

106) Έστω $f(x) = -2x^2 + 12x - 18$ και $g(x) = -x^2 - x + 12$.

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $y = \frac{f(x)}{x-3} + 2$ για $x \neq 3$ παριστάνει ευθεία με

εξαίρεση ένα σημείο το οποίο να προσδιοριστεί και να βρεθεί το είδος της γωνίας ω που σχηματίζει αυτή η ευθεία με τον άξονα $x'x$.

B) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{g(x)}{f(x)} \leq 0$.

Γ) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{g(x)}$.

Δ) Να αποδειχθεί ότι $\frac{334}{h(1)-3} - \frac{334}{h(-2)+3} - f(3) + 5 = 2009$.

107) Έστω $f(x) = -2x^2 + 12x - 18$ και $g(x) = -x^2 - x + 12$.

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $y = \frac{f(x)}{x-3} + 2$ για $x \neq 3$ παριστάνει ευθεία με

εξαίρεση ένα σημείο το οποίο να προσδιοριστεί και να βρεθεί το είδος της γωνίας ω που σχηματίζει αυτή η ευθεία με τον άξονα $x'x$.

B) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{g(x)}{f(x)} \leq 0$.

Γ) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{g(x)}$.

Δ) Να αποδειχθεί ότι $\frac{334}{h(1)-3} - \frac{334}{h(-2)+3} - f(3) + 5 = 2009$.

108) Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ με εξισώσεις: $16x + 2y = 2010$, $y = 2x + \mu^3 + 1000$ και $y = (\lambda^2 - 7\lambda + 2)x + 1$ αντίστοιχα, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

A) Ποιοι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και το είδος των γωνιών ω_1, ω_2 που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$.

B) Ποιο το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $\varepsilon_3, \varepsilon_1$ να είναι παράλληλες.

Γ) Ποιο το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η ε_2 να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

109) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 10x + 9$ και η συνάρτηση $g(x) = |x - 8|$.

A) Να γραφούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα

$A = \{x \in \mathbb{N} / f(x) < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} / g(x) \leq 2\}$, $A \cup B$ και $A \cap B$.

B) Να υπολογιστεί η απόσταση των $K(2, f(2))$ και $\Lambda(1, g(1))$.

Γ) Να γραφεί η παράσταση $M = \sqrt{f(x) + 16} + g(x)$ χωρίς απόλυτες τιμές και ριζικά αν είναι γνωστό ότι $x \in [5, 8]$.

110) Έστω η ευθεία (η) με εξίσωση $y = (\mu^3 - 27)x + 1$ και η εξίσωση

(E): $(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \cdot x = \lambda - 1$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

A) Ποιο το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία (η) να διέρχεται από το σημείο $M(\mu, -27\mu + 17)$.

B) Ποιο το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (E) να είναι αδύνατη;

Γ) Αν ρ_1 είναι η τιμή του μ ώστε η ευθεία (η) να είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$ και ρ_2 η τιμή του λ ώστε η εξίσωση (E) να είναι ταυτότητα τότε να βρεθεί εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες ρ_1 και ρ_2 .

111) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x - \lambda + 3$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Α) Να προσδιοριστεί το λ ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει μία διπλή πραγματική ρίζα.

Β) Να προσδιοριστεί το λ ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Γ) Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει δύο αντίστροφες ρίζες και αν ναι ποιο το λ και ποιες οι ρίζες;

Δ) Να υπολογιστεί η απόσταση d των σημείων $A(0, f(0))$ και $B(1, f(1))$ και μετά να αποδειχθεί ότι $(\sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot d - \sqrt{13}})^6 = 13$.

112) Έστω η παράσταση $K = \frac{(x^2 + x - 6) \cdot (x^2 - x - 12)}{x^2 - 6x + 8}$

Α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται το K ;

Β) Να αποδειχθεί ότι το K είναι τετράγωνο πρωτοβάθμιου πολυωνύμου.

Γ) Αν $x \in (-\infty, -3)$ να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{K} = 10$.

113) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 + 2x - 1$, το σημείο $M(-8\lambda + 4, \lambda^2 - 1)$ και η εξίσωση (E): $(\lambda + 1)x = \lambda - 1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Α) Αν το σημείο M ανήκει στον θετικό ημιάξονα Ox να βρεθεί το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης (E) και της $f(x) = 0$.

Β) Αν το σημείο M ανήκει στο 1^ο τεταρτημόριο να βρεθεί η μεγαλύτερη ακέραια τιμή που μπορεί να πάρει το λ καθώς και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Γ) Αν $\lambda = 1$, να υπολογιστεί η απόσταση του M από το σημείο $A(2, f(2))$.

114) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 20x + 50$ και η εξίσωση (E): $x^5 + 32 = 0$.

Α) Αν x_1 η λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ και x_2 η λύση της (E) να βρεθεί εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες x_1, x_2 .

Β) Να λυθεί η ανίσωση $x \cdot f(x) > 0$.

Γ) Να αποδειχθεί ότι $\sqrt[3]{f(6)} + 14 \cdot \sqrt[3]{f(5)} + 4 = 4$.

Δ) Να αποδειχθεί ότι η παράσταση $K = \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{f(3)} + \sqrt{f(4)}} - \sqrt[4]{f(8) + 63} \in \mathbb{Z}$.

115) Έστω $f(x) = -x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = |x + 1|$.

Α) Να γραφούν με αναγραφή τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{Z} / f(x) \geq 0\}$,

$B = \{x \in \mathbb{N} / g(x) \leq 3\}$ και $A \cup B, A \cap B$.

Β) Ποιο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $H(x) = \sqrt{g(x) - 2}$.

Γ) Αν $M = \sqrt[3]{H(3)} \cdot \sqrt[3]{H(5)}$ να αποδειχθεί ότι $M^6 = 8$.