

1) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - \lambda x + 9 & \alpha\nu \ x \leq 8 \\ 3x + \mu & \alpha\nu \ x > 8 \end{cases}$

- α) Ποια τα λ , μ αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(4,1) και B(10,3)
 β) Σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$

2) Αν η εξίσωση $(\alpha^2 - 4)x = 3\alpha - 6$ είναι αόριστη να βρεθεί το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)x = \alpha + 7$

3) Αν η εξίσωση $(\alpha^2 - 2\alpha - 35)x = \alpha + 5$ είναι αδύνατη να βρεθεί το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^2 - (3 - \alpha)x - 2 + \alpha = 1$

4) Αν η εξίσωση $\lambda x^2 - 2x + 1 = 0$ έχει μία διπλή πραγματική ρίζα να βρεθεί το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $(\lambda + 3)x = 3\lambda - 3$

5) Αν τα σημεία A($\lambda^3 - 2$, $|\mu - 2|$) και B(6,-1) είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ να βρεθεί το είδος των ριζών της εξίσωσης $\mu x^2 - 2\lambda x + 2 = 0$

6) Αν τα σημεία A($-\lambda^2 - 2\lambda$, $|\mu + 3|$) και B(2,-3) είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο $1^{ης}-3^{ης}$ γωνίας των αξόνων να βρεθεί το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $(\lambda - 1)x = \mu + 1$

7) Να λυθεί η εξίσωση : $|\chi^2 - 3\chi| - 6 = 0$

8) Έστω η εξίσωση $\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ με ρίζες χ_1, χ_2 . Ν. δ. ο. $\Delta = (\chi_1 - \chi_2)^2$

9) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $5\chi^2 - 2\chi\psi + 2\psi^2 - 2\chi - 2\psi + 1 = 0$

β) $10\chi^2 + 2\psi^2 + 2\chi + 2\psi - 4\chi\psi + 1 = 0$

10) Να διερευνηθεί η εξίσωση $(\lambda^3 - 25\lambda)\chi = \lambda$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ

11) Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $|2\chi - 3| = 37$ β) $|-2\chi| = \chi + 48$ γ) $|2007\chi + 1967| = -2006$

12) Να λυθούν οι ανισώσεις και να παρασταθούν οι λύσεις και γραφικά και με διαστήματα

α) $|\chi - 7| < 1$ β) $|\chi + 5| > 4$ γ) $d(x, 4) \leq 3$

13) Έστω $K = \alpha^2 - 5\alpha\beta$ και $\Lambda = 4\beta^2 + \alpha\beta$

α) Να αποδείξετε ότι $K + \Lambda \geq 0$ για κάθε τιμή των α, β

β) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0 > 5\beta$ τότε είναι και $K > 0$

14) Να απλοποιηθεί η παράσταση $K = \frac{3}{\sqrt{8} - \sqrt{5}} + \sqrt{18} - \sqrt{125} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$

15) Έστω τα σημεία A($\lambda^2 - 3\lambda$, $2\lambda^2 - 8$) και B(-2, -6)

α) Ποιο το λ ώστε $A \in x'x$

β) Ποιο το λ ώστε $A \in y'y$

γ) Ποιο το λ ώστε το A να ταυτίζεται με το B.

- 16) Έστω $f(x) = (\lambda - 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda + 2$
- Ποιο το λ ώστε να έχει μοναδική λύση η οποία να βρεθεί.
 - N.δ.ο. έχει πάντα μια ρίζα ανεξάρτητη του λ .
 - Να λυθεί η $f(x) = 0$ για $\lambda = 6$.
 - Ποιο το λ ώστε να έχει: 1) ρίζες αντίθετες 2) ρίζες αντίστροφες
- 17) Έστω $f(x) = 2x^2 + x - 10$
- Ποιο το άθροισμα και ποιο το γινόμενο των ριζών της ; (χωρίς να βρεθούν)
 - Αν χ_1, χ_2 οι ρίζες της να υπολογιστεί η παράσταση $K = 4\chi_1^2\chi_2 + 4\chi_1\chi_2^2$
 - Να βρεθούν οι ρίζες της
 - Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x)$ για κάθε τιμή του x
 - Να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης $M = f(-2007)f(-1,967)f(2006)$
 - Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$
 - Να παραγοντοποιηθεί η $f(x)$
- 18) Έστω $f(x) = -3x^2 - 4x + 7$
- Ποιο το άθροισμα και ποιο το γινόμενο των ριζών της ; (χωρίς να βρεθούν)
 - Αν χ_1, χ_2 οι ρίζες της να υπολογιστεί η παράσταση $K = 3\chi_1^2\chi_2 + 3\chi_1\chi_2^2$
 - Να βρεθούν οι ρίζες της
 - Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x)$ για κάθε τιμή του x
 - Να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης $M = f(-19) f(-1,3)f(21)$
 - Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$
 - Να παραγοντοποιηθεί η $f(x)$
- 19) Έστω $f(x) = x^2 - 4x + 4$
- Ποιο το άθροισμα και ποιο το γινόμενο των ριζών της ;(χωρίς να βρεθούν οι ρίζες)
 - Να βρεθούν οι ρίζες της
 - Να παραγοντοποιηθεί η $f(x)$
 - Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x)$ για κάθε τιμή του x
 - Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$
 - Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$
- 20) Έστω $f(x) = -x^2 + x - 2$
- Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x)$ για κάθε τιμή του x
 - Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \geq 0$
 - Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$
- 21) Να αποδείξετε ότι αν $1 < x < 3$ τότε $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2$
- 22) Έστω $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$
- Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$
 - Ποιο το πρόσημο της $f(x)$
 - Ποιο το πεδίο ορισμού της $g(x) = \sqrt{f(x)}$
- 23) Έστω $f(x) = -x^2 + 5x - 6$
- Ποιο το άθροισμα και ποιο το γινόμενο των ριζών της ;(χωρίς να βρεθούν οι ρίζες)
 - Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$
 - Ποιο το πρόσημο της $f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - Αν $f(x) > 0$ να απλοποιηθεί η παράσταση
- $$K = \frac{|x-2| + |x-3|}{|x-1| + |x-5|}$$

24) Έστω ότι η εξίσωση $\chi^2 + 4\chi + 2\lambda = 0$ έχει μια διπλή πραγματική ρίζα.

α) Να λυθεί η εξίσωση $(\lambda^2 - 4)\chi = \lambda^2 - 2\lambda$

β) Να λυθεί η ανίσωση $|\chi - 1| < \lambda$

γ) Να λυθεί το σύστημα με την μέθοδο οριζουσών :

$$\begin{cases} 3\chi + \psi = \lambda \\ \lambda\chi - 5\psi = 7 \end{cases}$$

25) Έστω ότι η εξίσωση $(\mu^2 - 9)\chi = \mu - 3$ είναι αδύνατη.

α) Να λυθεί η εξίσωση $\mu\chi^2 - 3\mu\chi - 6 = 0$

β) Να λυθεί η εξίσωση $|\chi| = \mu + 2$

γ) Πόσες λύσεις έχει το σύστημα:

$$\begin{cases} 2\chi + 6\psi = 10 \\ \chi - \mu\psi = 5 \end{cases}$$

26) Έστω οι ευθείες $\epsilon_1 : y = (2k^2 - 5k)x + |\mu|$ και $\epsilon_2 : y = 7\chi - 2007$

α) Ποιο το k ώστε οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 να είναι παράλληλες ;

β) Ποιο το μ ώστε η ευθεία ϵ_1 να διέρχεται από το σημείο $A(0, 67)$

γ) Ποιο το σημείο τομής των ϵ_1 και ϵ_2 για $k = 2$ και $\mu = -9$

27) Δίνονται τα σύνολα : $A = \{ x \in \mathbb{Z} / -1 < x \leq 5 \}$ και $B = \{ x \in \mathbb{Z} / |x+1| \leq 2 \}$.

α) Να γράψετε τα σύνολα A και B υπό μορφή διαστημάτων .

β) Να βρείτε τα διαστήματα που αντιστοιχούν στα σύνολα : $A \cup B$ και $A \cap B$.

28) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

γ) Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) \leq 0$.

29) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \alpha x^2 - (\alpha + \beta + 1)x + 3$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

και τα σημεία $A(2,7)$, $B(1,0)$ που ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha = 5$ και $\beta = 2$.

β) Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος (α), να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , με τους άξονες των συντεταγμένων.

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση (AB) των σημείων A και B ισούται με $5\sqrt{2}$.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, που διέρχεται από τα σημεία A και B .

30) Α. Αν ισχύει ότι $-2 < x < 1$, να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης: $\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1} + \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}$

Β. α) Να λυθεί η εξίσωση $-2x^2 + x + 1 = 0$.

β) Να λυθεί η ανίσωση $-2x^2 + x + 1 > 0$.

Γ. α) Να λυθεί η εξίσωση $|6 - 3x| = 9$.

β) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x , για τις οποίες ισχύει $|4 - x| \leq 2$.

31) Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β) Να γραφτεί σε απλούστερη μορφή ο τύπος της f .

γ) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x , για τις οποίες ισχύει $f(x) \leq 1$.

B. Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$, με $\lambda \in R$.

Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία το σύστημα είναι αδύνατο.

32) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις $\varepsilon_1: y = (3\lambda^2 - 1)x + 5$ και $\varepsilon_2: y = 2\lambda x - 9$, $\lambda \in R$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες οι ευθείες είναι παράλληλες.

β) Αν $\lambda = 2$ να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Α στο οποίο τέμνονται οι δύο ευθείες.

γ) Αν Β(-6,-14) ένα άλλο σημείο του επιπέδου να βρεθεί η απόσταση του σημείου Β από το σημείο Α, όπου Α είναι το σημείο του προηγούμενου ερωτήματος.

33) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\kappa - 1)x - \kappa + 1 = 0$, $\kappa \in R$.

α) Για ποια τιμή του κ η εξίσωση έχει ρίζα το 2.

β) Για ποιες τιμές του κ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρεθούν οι τιμές του κ ώστε να ισχύει η σχέση $x_1 + x_2 > 2(x_1 \cdot x_2) + 3$.

34) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \kappa x^2 - x + \kappa$, $\kappa \in R$

α) Αν $\kappa \neq 0$, για ποιες τιμές του κ η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία διπλή ρίζα;

β) Να βρεθεί η τιμή του $\kappa \in R$ ώστε η γραφική παράσταση της g να διέρχεται από το σημείο Μ(1,3).

γ) Για την τιμή $\kappa=0$ να λυθεί η ανίσωση $g(x) > -\frac{100}{x}$.

35) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1) \cdot x^2 - 4 \cdot x + \lambda + 2 = 0$, με $\lambda \in R, \lambda \neq 1$.

α) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Για ποιες τιμές του λ η ανίσωση $(\lambda - 1) \cdot x^2 - 4 \cdot x + \lambda + 2 < 0$ αληθεύει για κάθε τιμή του x .

γ) Στην περίπτωση που η παραπάνω εξίσωση έχει 2 ρίζες να βρεθούν οι τιμές του λ αν είναι γνωστό ότι οι ρίζες είναι ομόσημοι αριθμοί.

36) Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = |3 - x| - 4$.

α) Να απλοποιηθεί ο τύπος της για τις διάφορες τιμές του $x \in R$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 6$.

37) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις: $\varepsilon_1: y = (\lambda^2 - 5)x + 10$ και $\varepsilon_2: y = 4\lambda x - 6$

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$, αν είναι γνωστό ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.

β) Για $\lambda = -3$:

i) Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 .

ii) Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της ε_2 .

38) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2-x}{x^2-3x+2}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της f .
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$.

39) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2x^2-5x+3}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
 γ) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ισχύει η σχέση $f(x) \geq 3$.

40) Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = |2x-3| - 5$.

- α) Να απλοποιηθεί ο τύπος της για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbf{R}$.
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq -2$.

41) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{4-x}{x^2-4x+3}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της f .
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

42) Δίνονται οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 με εξισώσεις: $\epsilon_1: y = (2\lambda^2 - 5\lambda) \cdot x + 8$ και $\epsilon_2: y = (\lambda - 4) \cdot x - 4$.

- α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbf{R}$ αν είναι γνωστό ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.
 β) Αν $\lambda = -2$:
 i) Να βρείτε το σημείο τομής των ϵ_1 και ϵ_2 .
 ii) Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της ϵ_1 .

43) Δίνεται το γραμμικό σύστημα:
$$\begin{cases} 2x + \lambda y = \lambda^2 \\ \lambda x + 2y = 4 \end{cases}$$

- α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.
 β) Για $\lambda = -3$ να λυθεί το σύστημα.
 γ) Αν το ζεύγος $(2, 3)$ είναι λύση του συστήματος να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbf{R}$.

44) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{3x^2+x-2}{x^2-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
 γ) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ισχύει η σχέση $f(x) \leq 2$.

45) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}$, ώστε η εξίσωση $x^2 - (2\lambda - 2)x + (\lambda^2 - 5) = 0$ να έχει:

- α) δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
 β) μία διπλή πραγματική ρίζα.
 γ) δύο πραγματικές ρίζες αντίθετες.
 δ) δύο πραγματικές ρίζες αντίστροφες.

- 46) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + 10$
- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{f(x)}$
 - Αν $f(x) < 0$ να απλοποιηθεί η παράσταση $K = |x - 2| + |x - 5|$
 - Να βρεθεί η απόσταση των σημείων $A(1, f(1))$ και $B(3, f(3))$
- 47) Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με αντίστοιχες εξισώσεις: $2y = 4x - 12$ και $y = (\lambda^5 - 30)x + 67$
- Να βρεθούν τα σημεία τομής της ε_1 με τους άξονες $x'x$ και $y'y$
 - Να βρεθεί το $\lambda \in \mathcal{R}$ ώστε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
 - Να εξεταστεί αν η ε_1 διέρχεται από το σημείο $M(\mu + 3, 2\mu)$
 - Αν $\mu = -2$ να βρεθεί το συμμετρικό του M ως προς τον $y'y$ και την ευθεία $y = x$
- 48) Έστω τα σύνολα $A = \{x \in \mathcal{R} / -x^2 + 5x + 6 = 0\}$ και $B = \{x \in \mathcal{R} / x \cdot |x - 6| \cdot (x^2 - 1) = 0\}$
- Να γραφούν με αναγραφή τα σύνολα A, B .
 - Να βρεθεί η ένωση και η τομή τους.
 - Να εξεταστεί αν το B είναι υποσύνολο του A
- 49) Έστω τα σημεία $A(\lambda^2 - 3\lambda, \mu^2 + 2\mu - 4)$ και $B(2, -1)$
- Ποια τα λ, μ ώστε να είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$
 - Ποια τα λ, μ ώστε να είναι συμμετρικά ως προς την αρχή αξόνων $O(0,0)$
 - Ποια η απόσταση (AB) για $\lambda = 2$ και $\mu = 4$
- 50) Έστω η ευθεία ε με εξίσωση: $y = (2\lambda^2 + 6\lambda) \cdot x + |\mu - 2| - 3$
- Ποιο το λ ώστε η ε να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
 - Ποιο το μ ώστε η ε να περνάει από την αρχή των αξόνων
 - Προσδιορίστε τα λ και μ ώστε η ε να είναι παράλληλη στη ευθεία $y = 8x - 3$
- 51) Έστω η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$
- Ποιο το λ ώστε να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες
 - Αν χ_1, χ_2 οι ρίζες της με $\chi_1 = 3\chi_2$ να βρείτε τις ρίζες αυτές και κατόπιν το λ
- 52) Έστω ότι η εξίσωση $(\alpha + \beta - 8) \cdot x = \alpha \cdot \beta - 12$ είναι αόριστη.
- Να βρεθεί εξίσωση με ρίζες τα α και β
 - Να λυθεί η εξίσωση αυτή
 - Να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $(\alpha + \beta) \cdot x = 8x + 2010$
- 53) Α) Αν η εξίσωση $x^2 + 2x - 3 = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$ χωρίς να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης.
- Β) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 + 2x - 3 = 0$
- Γ) Να λυθεί η ανίσωση: $(2x - 6) \cdot (x^2 + 2x - 3) < 0$
- 54) Έστω ότι η εξίσωση $(\alpha^2 - 4) \cdot x = 3 \cdot \alpha - 6$ είναι αόριστη.
- Να βρεθεί το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $(\alpha^2 - 3 \cdot \alpha + 2) \cdot x = \alpha + 7$
 - Να λυθεί η εξίσωση: $|2x - 8| = \alpha$
 - Να λυθεί η ανίσωση: $|2x + 4| < \alpha$
- 55) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις: $\varepsilon_1: y = (2\lambda^2 - 5\lambda) \cdot x + 8$ και $\varepsilon_2: y = (\lambda - 4) \cdot x - 4$
- Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathcal{R}$ αν είναι γνωστό ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.
 - Αν $\lambda = -2$:
 - Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 .
 - Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της ε_1 .

56) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x + 3$ και $g(x) = |x-1| - 2$

α) να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

β) αν $x \geq 1$ να απλοποιηθεί η συνάρτηση $h(x)$

57) Δίνεται η ευθεία ϵ με εξίσωση $\psi = \lambda \cdot x + \mu$.

α) Να υπολογίσετε τα λ , μ αν η ευθεία περνά από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(-2,-1)$

β) Να υπολογιστεί η τιμή του κ ώστε η ευθεία δ , με εξίσωση $\psi = (\kappa^2 - 5\kappa + 2)x + \kappa + 3$ να είναι παράλληλη με την ευθεία ϵ .

58) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{10}{\sqrt{-x^2 + 3x + 10}}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$

β) Να δείξετε ότι $f(0) - \frac{9}{\sqrt{10} + 1} = 1$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $(x-5)f^2(x) = 1$

59) Α. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x-2|-3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{|x-2|+5}{6}$

Β. Να λύσετε την ανίσωση: $(x-2) \cdot (-2x^2 + 5x - 3) < 0$

60) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \sqrt{|x|-2}$ και $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $[f(x)]^2 = [g(x)]^2 - 13$

61) Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(-1,-4)$, $\Gamma(2,5)$ και η συνάρτηση $f(x) = \kappa x + \lambda$.

α) Να βρεθούν τα κ , λ αν τα A , B ανήκουν στη γραφική παράσταση της $f(x)$

β) Για $\kappa=3$ και $\lambda=-1$ να εξετάσετε αν το Γ ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x)$

γ) Για $\kappa=3$ και $\lambda=-1$ να βρείτε τα σημεία τομής της $f(x)$ με τους άξονες x' και y' .

62) Δίνεται το $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

α) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$

β) Αν $x \in (-3, 1/2)$, να λυθεί η εξίσωση: $|2x^2 + 7| + |f(x)| = 0$

γ) Αν $x < -3$, να απλοποιήσετε την παράσταση: $B = \frac{(2x-6)|f(x)|}{(x^2-9)(1-2x)}$

63) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in R$.

α) Να βρεθεί το πρόσημο του τριωνύμου.

β) Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{2-x}{x^2+2x-15} \geq 0$

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $(2x-1)^2 + 2|2x-1| - 15 = 0$.

64) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x + 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδείξετε ότι: $(f(5) + f(-2))(\sqrt{13} - \sqrt{6}) = [f(3)]^2$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς: $\rho_1 = \frac{1}{f(0)-1}$ και $\rho_2 = 1 - f(0)$.

65) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις $\varepsilon_1: y = 3(2-\lambda)x + 2$ και $\varepsilon_2: y = (\lambda^2 + 2)x + 5$, $\lambda \in R$.

α) Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in R$, η ε_2 δεν μπορεί να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

γ) Αν $\lambda=1$, να προσδιορίσετε το σημείο όπου η ε_1 τέμνει τον $x'x$ και το σημείο όπου η ε_2 τέμνει τον $y'y$.

66) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - 9}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

γ) Αν $A = |x| + 3$, να λυθεί η ανίσωση $A > 5$.

67) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + x - \kappa^2 = 0$ (1), $\kappa \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του κ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες.

β) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της (1) τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\rho_1 + \rho_2 = -1$ και $\rho_1 \cdot \rho_2 = -\kappa^2$.

ii. Να προσδιορίσετε τις τιμές του κ για τις οποίες ισχύει $\rho_1 \cdot (\kappa + \rho_2) + \kappa \rho_2 > -6$.

68) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 9$, $h(x) = 4x + 12$

α) Να μετατρέψετε το τριώνυμο $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση $K(x) = \frac{f(x) - g(x)}{h(x)}$

γ) Να απλοποιήσετε την $K(x)$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $|K(x)| = \frac{3}{4}$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $4|K(x)| \leq 5$

69) Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις $y = (\lambda^2 + 4)x + 4$ και $y = 20x + \lambda$, αντίστοιχα με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το λ ώστε οι παραπάνω ευθείες να είναι παράλληλες μεταξύ τους.

β) Για $\lambda = -4$ να δείξετε ότι $\frac{-6}{\sqrt{6+\lambda}-2} - 3\sqrt{2} = 6$

70) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

β) Αν $|x| < 1$

i. να απλοποιήσετε την παράσταση $A(x) = [f(x)]^2 + |x-3| + |x+2|$

ii. να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 7 - 4x$

71) Α. Να μελετηθεί το πρόσημο της $f(x) = -x^2 + x - 4$.

Β. Να λυθεί η ανίσωση $|-x^2 + x - 4| > 2x + 2$

72) Δίνονται τα σημεία $K(0,2)$ και $\Lambda(-1,3)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $K\Lambda$.

β) Αν η ευθεία $K\Lambda$ έχει εξίσωση $\psi = -\chi + 2$ και τα σημεία K, Λ και $M(1 - \lambda^2, 4\lambda - 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι συνευθειακά, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$

ii. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία $\varepsilon: y + 8x = \lambda^3 x - 5$ με τον άξονα $\chi'\chi$.

73) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + |x| - 6}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{|x| + 2}{|x| + 3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) \cdot (|x| + 3) = 3$.

δ) Να λυθεί η ανίσωση $10f(x) \geq |x| + 6$.

74) Α. Για την τιμή του λ που η εξίσωση $(\lambda^2 - 4)x = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ είναι αόριστη, να λυθεί η ανίσωση $d(x, \lambda) < 5$.

Β. Αν a είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^5 - 81x = 0$, να αποδείξετε

ότι: $\frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a-1}} = \sqrt{a}$.

75) Έστω το σημείο $M(\lambda^2-7\lambda+6, |\lambda-1|-3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Ποιο το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο M να ανήκει στον θετικό ημιάξονα Oy

B) Ποιο το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο M να βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο.

Γ) Αν $\lambda=2$ να βρεθούν:

1. Το συμμετρικό του M ως προς τον άξονα $y'y$.

2. Το συμμετρικό του M ως προς την διχοτόμο $1^{ης}-3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

3. Η απόσταση του M από το σημείο $\Lambda(8,-7)$.

76) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda+2)x^2 - 5\lambda x - 2$, με $\lambda \neq -2$.

A) Αν $\lambda=1$ τότε:

1) Να λύσετε την ανισότητα $f(x) \leq 0$

2) Να βρείτε τα πρόσημα των $f(-2), f(-\frac{2}{3}), f(\frac{5}{2}), f(\frac{1}{\sqrt{2}})$

B) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της $f(x)=0$ και S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της τότε

1) Να δείξετε ότι $(S-x_1)(S-x_2)=P$

2) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να ισχύει: $(S-x_1)(S-x_2) \leq S$

77) A. Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{(x-1)^2} < 2$.

B. Για $-1 < x < 3$ να απλοποιηθεί η παρακάτω παράσταση:

$$K = 2\sqrt{x^2+2x+1} - |x-3| + \frac{12}{|x+2| + \sqrt{(x-4)^2}}$$

78) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-2x^2+7x-6}{x-2}$ και το σημείο $A(3, -1)$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και να απλοποιηθεί ο τύπος της $f(x)$

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην ευθεία

$$y = -2x + 3$$

γ) Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $g(x) = \left| \begin{matrix} f(0) & \mu \\ f(3) & 4 \end{matrix} \right| \cdot x + 2007$ να είναι σταθερή.

79) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda)x - \lambda + 1 = 0$ (1). Να βρείτε το λ ώστε:

α) Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση (1) να έχει 2 ρίζες ετερόσημες.

β) Να βρείτε το λ ώστε μια ρίζα της εξίσωσης (1) να είναι ο αριθμός -2.

γ) Να βρείτε το λ ώστε αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) να ισχύει η ανίσωση: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1$