

Περιέχονται 150 συνδυαστικές ασκήσεις επανάληψης και θέματα εξετάσεων. Δεν συμπεριλαμβάνεται το κεφάλαιο των πιθανοτήτων, της γεωμετρικής προόδου, της μονοτονίας συνάρτησης, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$

Η έντυπη μορφή διατίθεται δωρεάν στους μαθητές των τμημάτων Α1 και Α2 του 3ου ΓΕΛ Αγίου Δημητρίου.

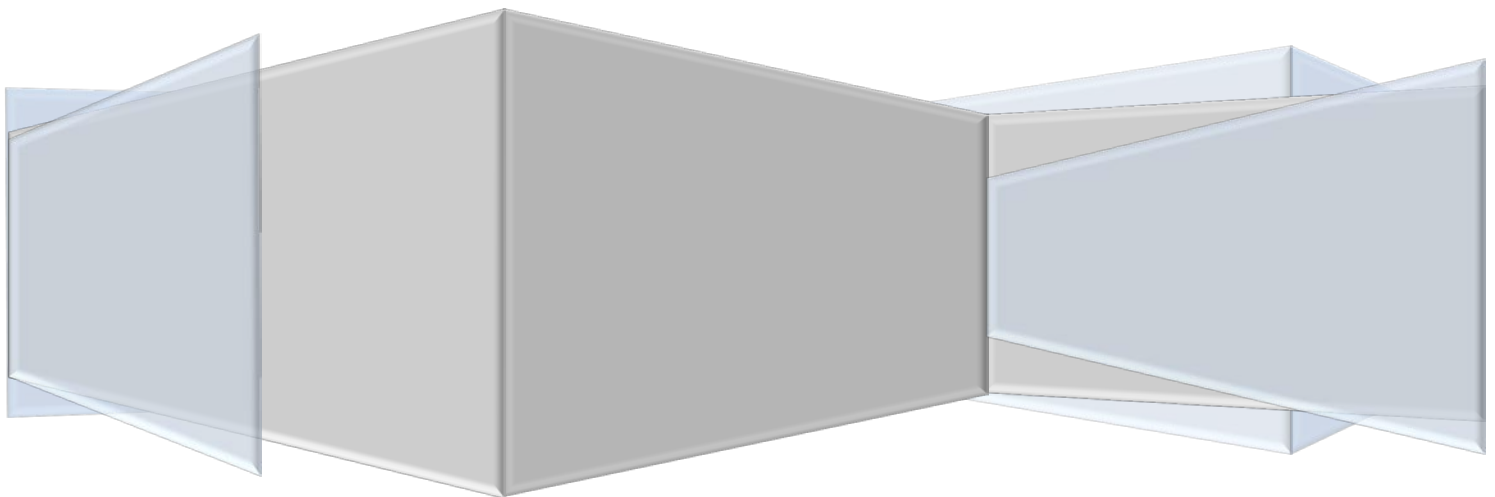
Σε ηλεκτρονική μορφή θα το βρείτε στη διεύθυνση gkollias.mysch.gr

ΑΛΓΕΒΡΑ
Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

150 ασκήσεις επανάληψης

και

Θέματα εξετάσεων



ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 8x + 15$ και η παράσταση

$$A = |x-3| - |x-5| - 2(x-4).$$

- α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι "κάτω" από τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $x \in (3,5)$
- β) Η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του x .

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ και η παράσταση $\Pi = |\lambda + 1|$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε το σύνολο (πεδίο) ορισμού A , της συνάρτησης f .
- β) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε $\Pi \in A$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3 - x$, ορισμένη στο διάστημα $[1,5]$, η

$$g(x) = f(x^2 + 1) \text{ και η } h(x) = (g(x) + 2)^2 - 16.$$

Να βρείτε :

- α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g
- β) Τις συντεταγμένες των σημείων στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης h τους άξονες.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (x-1)^{2012} \cdot (x+1)^{2013}$

Να βρείτε:

- α) Τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες.
- β) Τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της g που είναι 'πάνω' από τον άξονα $x'x$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 5 & x < 0 \\ x - 5 & x \geq 0 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές: $f(f(2)), f(f(-3)), f(f(f(2)))$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε $\beta^2 < 3\gamma$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & x \geq 1 \\ -2x + 1 & x < 1 \end{cases}$.

Να λυθεί η εξίσωση $3|f(x)| = 4x - 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο \mathbb{R} , και ισχύει: $f(2x+1) = (x-12) \cdot (x+13)$

Να βρείτε την τιμή της f για $x = 31$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Η συνάρτηση f ορίζεται στο \mathbb{R} και ισχύει: $f(x) + 2f(2-x) = 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Η συνάρτηση f ορίζεται στο \mathbb{R} και ισχύει: $af(x) + \beta f(3-x) = 5 - 3x$,
 $f(2) = 5, f(1) = 2$.

Να βρείτε:

- α) Τους αριθμούς α και β
- β) Την $f(x)$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Η συνάρτηση f ορίζεται στο \mathbb{R} και για κάθε x ισχύει: $f^2(x) + f(x) + 2 = x^2 + x$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα $y'y$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\beta < 0$, $0 < 4\gamma < \beta^2$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο διαφορετικά σημεία με θετικές τετμημένες.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Η συνάρτηση f ορίζεται στο \mathbb{R} και για κάθε x, y ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Να αποδείξετε:

- α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- β) $f(-x) = -f(x)$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}{x - 3}$ και η παράσταση

$$A = |k| + |2 - k| + 3|3 - k|$$

Αν το k ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $4 < A \leq 5$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού, A_f , της συνάρτησης f
2. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in A_f$, οι τιμές της f ανήκουν στο διάστημα $[-1, 1]$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x + \sqrt{2 - \sqrt{3 + x^2}}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{g(1)}{g^2(0)} + \frac{g^2(0)}{g(1)} = 4$

ΑΣΚΗΣΗ 17

Να βρείτε το πεδίο ορισμού για κάθε μία από τις συναρτήσεις :

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+4}}, \quad g(x) = \sqrt{2x^2-x+1} + \sqrt{1-x^2}, \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$s(x) = \frac{\sqrt{x-|x|}}{x}, \quad k(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad r(x) = \frac{\sqrt{5x-5}}{x^2-5}$$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2|x-3| + |3-x| = 3$ β) $(x-1)^3 = 8$ γ) $2x^2 = 4x$ δ) $3x^2 - 12 = 0$

ε) $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ στ) $\frac{x^2}{\alpha\beta} = \frac{x}{\alpha} + \frac{x}{\beta} - 1$

ΑΣΚΗΣΗ 19

Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $(x-1)^6 - 7(x-1)^3 - 8 = 0$

β) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

γ) $x + \sqrt{x} - 2 = 0$

δ) $(x - \frac{1}{x})^2 - \sqrt{5}(x + \frac{1}{x}) + 4 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 20

Να λύσετε τις εξισώσεις

$(x+1)^2 + |x+1| - 2 = 0$

$x^4 - (\alpha+1)x^2 + \alpha = 0$

$x - \sqrt{x} = 20$

$x^4 - 3\alpha^2 x^2 - 4\alpha^2 = 0$

$\gamma^4 x^4 + (\alpha^2 \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2)x - \alpha^2 \beta^2 = 0, \gamma \neq 0$

$(1-|x|)^2 = 4$

$\frac{2}{|x|} = \frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}$

$|x^2 - x| + |x^2 - 3x + 2| = 0$

$x^6 + x^3 - 2 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 21

Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) x^2 + 2kx - 3k^2 = 0 \quad \beta) 3x^2 - 4kx + k^2 = 0 \quad \gamma) k^2x^2 + 2kx + 1 - k^2 = 0$$

$$k \in \mathbb{R}$$

ΑΣΚΗΣΗ 22

Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\alpha) (x+1)^2 + |x+1| - 2 < 0 \quad \beta) (1-|x|)^2 > 4 \quad \gamma) x^4 - 3\alpha^2x^2 - 4\alpha^2 < 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 23

Να βρείτε τον y συναρτήσει του x , όταν :

$$\alpha) 4x^2 - 8xy - 5y^2 = 0 \quad \beta) 2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 24

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί ώστε να είναι $\alpha > 0, \beta \neq 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 2\sqrt{\alpha}x + \beta = 0$, έχει δυο ίσες ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ 25

Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x, y , για τους οποίους ισχύει $y = x^2 - 2x - 1$, να αποδείξετε ότι $y \geq -2$

ΑΣΚΗΣΗ 26

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda - 1 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

- Να αποδείξετε ότι έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
- Για ποιες τιμές του λ έχει μια διπλή λύση ;
- Αν x_1, x_2 είναι οι άνισες ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε να ισχύει : $x_1 + x_2 + 2 = |x_1 \cdot x_2|$

ΑΣΚΗΣΗ 27

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & x < 0 \\ x - 5 & x \geq 0 \end{cases}$

Αν ισχύει, $f(-1) + 5f(f(2)) = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι $a = 1$
- β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f(2) + f'(4)$, όπου v φυσικός αριθμός.

ΑΣΚΗΣΗ 28

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = k^2 \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$, όπου k θετικός αριθμός.

- α) Να βρείτε το σύνολο (πεδίο) ορισμού της συνάρτησης.
- β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $P(2, 1)$ να βρείτε το k

ΑΣΚΗΣΗ 29

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - kx - (k^2 + 1)$, με $k \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f , τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο μόνο σημεία με ετερόσημες τετμημένες, για κάθε τιμή του k

ΑΣΚΗΣΗ 30

Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων :

$$\frac{3-x}{6} + \frac{x}{4} - 2(x-2) - \frac{5(5-2x)}{6} < 0 \quad \text{και} \quad 1 \leq |3x-7| \leq 3$$

ΑΣΚΗΣΗ 31

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων :

$$100 - x^2 > 0$$

$$2x^2 - x - 1 < 0$$

$$x^2 - x < 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 32

Δίνεται η εξίσωση: $k^2(x+3) + 2(x+1) = 3k(x-1) + (k+1)^3$, όπου k πραγματικός αριθμός

- α) Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του k
 β) Αν $k > 2$ να αποδείξετε ότι η λύση της εξίσωσης είναι θετικός αριθμός.

ΑΣΚΗΣΗ 33

Έστω η εξίσωση $2x^2 - 2x + 2 - 6\alpha\beta = 0$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

Αν η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό, $\rho = \alpha + \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 34

Δίνεται η συνάρτηση f , που ορίζεται στο \mathbb{R} και για κάθε x ισχύει :

$$f(4x-3) = 2x+10 - f(5) \text{ Να αποδείξετε ότι :}$$

- α) $f(5) = 7$
 β) $f(x) = \frac{x+9}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 35

Δίνεται η εξίσωση, (ε) : $a \cdot x - x = (a-1)[a^2 + 2a - (\lambda - |\lambda| - 1)]$, όπου α, λ πραγματικοί αριθμοί.

- A) Να λυθεί η εξίσωση (ε) για κάθε τιμή της παραμέτρου α
 B) Αν $\lambda < 0$, να αποδείξετε ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης (ε) είναι θετικός αριθμός
 Γ) Αν $\lambda \geq 0$, και η μοναδική λύση της εξίσωσης (ε) είναι

$$x = \frac{\sqrt{14 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}} \text{ να αποδείξετε ότι } \alpha = -3$$

ΑΣΚΗΣΗ 36

Δίνεται η εξίσωση, (ε) : $a \cdot x = x + (a-1)(a^2 + 2a + 5)$, όπου α πραγματικός αριθμός.

- A) Να λυθεί η εξίσωση (ε) για κάθε τιμή της παραμέτρου α
- B) Να αποδείξετε ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης (ε) είναι θετικός αριθμός
- Γ) Αν η μοναδική λύση της εξίσωσης (ε) είναι $x = 2 \frac{\sqrt{14 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}}$ να βρείτε τις τιμές του α .

ΑΣΚΗΣΗ 37

Δίνεται το τριώνυμο $P(x) = x^2 + 2x - (\lambda - |\lambda| - 1)$, όπου λ αρνητικός πραγματικός αριθμός.

- A) Να αποδείξετε ότι $P(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- B) Αν $P(1) = \lambda^2 - \lambda + 2$ να βρείτε τις τιμές του λ .

ΑΣΚΗΣΗ 38

Δίνεται η παράσταση $A(x) = 2|x-1| + 3|2-x|$ με $x \in [1, 2]$

- A) Να αποδείξετε ότι $A(x) = -x + 4$
- B) Να λύσετε την ανίσωση $|A(x)| + \frac{|x-4|}{2} \leq 3$

ΑΣΚΗΣΗ 39

Αν η εξίσωση $\lambda x + 2 = \mu x + \lambda + \mu$, έχει άπειρες λύσεις, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda^2 x + \mu = \mu^2(x+1) + \lambda^2$, είναι αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΗ 40

Έστω οι παραστάσεις $A = \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{72}$ και $B = \sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{24}$.

Να αποδείξετε ότι :

- α) $A = 6\sqrt{2}$ και $B = 2\sqrt[3]{3}$
- β) $A \cdot B = 12\sqrt[6]{72}$

ΑΣΚΗΣΗ 41

Τα κλάσματα $A = \frac{2\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$ και $B = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, να γραφούν σε ισοδύναμο με ρητό παρανομαστή. (Δίνεται ότι $a \geq 0$ και $a \neq 1$)

ΑΣΚΗΣΗ 42

Εστω η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με λ πραγματικό αριθμό.

- α) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση έχει δυο ίσες και πραγματικές ρίζες .
 β) Για $\lambda = 1$ να βρεθεί η διπλή ρίζα της εξίσωσης .

ΑΣΚΗΣΗ 43

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- α) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
 β) $x^4 - x^2 - 4 = 0$
 γ) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 44

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν πραγματικές και ίσες ρίζες.

- α) $(\lambda + 3)x^2 - 4\lambda x + 4 = 0$
 β) $x^2 - (\lambda + 2)x + 9 = 0$
 γ) $\lambda x^2 - (2\lambda + 3)x + \lambda + 1 = 0$
 δ) $x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda + 3 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 45

Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού μ οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές και άνισες ρίζες :

- α) $x^2 + \mu x + \mu + 3 = 0$
 β) $(\mu + 3)x^2 - 2\mu x + 4 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 46

Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού μ οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες :

$$\alpha) 2x^2 - (4\mu + 1)x + 2\mu^2 = 0$$

$$\beta) x^2 + (\mu - 1)x + \mu = 0$$

$$\gamma) (\mu + 2)x^2 + 2\mu x + \mu - 2 = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 47

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 5 = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) 5x_1 + 2x_1x_2 + 5x_2 \quad \beta) 3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2 \quad \gamma) (x_1 - x_2)^2$$

$$\delta) \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} \quad \varepsilon) \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \quad \sigma\tau) 4x_1x_2^3 + 4x_1^3x_2 \quad \zeta) \frac{1}{2x_1+1} + \frac{1}{2x_2+1} \quad \eta) x_1^3 + x_2^3$$

ΑΣΚΗΣΗ 48

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 5 = 0$ με ρίζες x_1 και x_2 .

$$\text{Να βρείτε το } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ώστε } (x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) = -4$$

ΑΣΚΗΣΗ 49

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\beta + 2)x + 2\beta = 0$ με ρίζες ρ_1 και ρ_2 .

$$\text{Να βρείτε το } \beta \in \mathbb{R} \text{ ώστε } \rho_1 - \rho_2 = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 50

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 + (2\lambda + 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ έχει :

α) ρίζες πραγματικές και ίσες

β) ρίζες αντίστροφες

γ) ρίζες αντίθετες

δ) ρίζα τον αριθμό -1

ε) γινόμενο ριζών ίσο με 6

στ) ρίζες x_1 και x_2 που ικανοποιούν την σχέση $3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2 < 0$

ΑΣΚΗΣΗ 51

Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 + 3x + 5$, να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τις :

$$\alpha) \rho_1 = 2x_1 - 1 \text{ και } \rho_2 = 2x_2 - 1$$

$$\beta) \rho_1 = \frac{2}{x_1} \text{ και } \rho_2 = \frac{2}{x_2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 52

Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^2 - 2(\mu + 5)x + \mu^2 - 4 = 0$ να έχει δυο ρίζες ετερόσημες

ΑΣΚΗΣΗ 53

Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^2 - (\mu + 2)x + 4 = 0$, να έχει:

- α) Δύο ρίζες θετικές και άνισες.
- β) Δύο ρίζες αρνητικές.

ΑΣΚΗΣΗ 54

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 6x + k = 0$ με ρίζες x_1 και x_2 .

Να βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ ώστε: $2x_1 + 5x_2 = 18$

ΑΣΚΗΣΗ 55

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού μ , ώστε η ανίσωση

$$(\mu - 4)x^2 - 6x + \mu + 4 < 0 \text{ να ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 56

Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(3, 4)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $3x - 5y + 6 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 57

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(2, -1)$ και σχηματίζει με θετικό ημιάξονα $οx$ γωνία 60° .

ΑΣΚΗΣΗ 58

Να βρείτε την τιμή του α ώστε η ευθεία $y = (\alpha + 2)x - 5$ να είναι παράλληλη με την ευθεία $2x - y + 6 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 59

Δίνεται η ευθεία (ε) , $y = \frac{k-2}{k}x + \frac{3(2-k)}{k}$ με $k \neq 0$. Να βρείτε τον αριθμό k ώστε η ευθεία (ε)

- α) Να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -2$
- β) Να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 5$
- γ) Να διέρχεται από το σημείο $P(3, -1)$

ΑΣΚΗΣΗ 60

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(1, 3)$

ΑΣΚΗΣΗ 61

Έστω το σημείο $A(2k, k-2)$ με $k \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία που προκύπτουν για τις διάφορες τιμές του αριθμού k , ανήκουν σε ευθεία γραμμή της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΑΣΚΗΣΗ 62

Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$ και $\Gamma(3, 3)$ είναι συνευθειακά.

ΑΣΚΗΣΗ 63

Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $y = (k+2)x + k - 3$ με $k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του k ώστε:

Να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 60°

Να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 120°

ΑΣΚΗΣΗ 64

Η ευθεία $y = x - (k - 1)$, $k \in \mathbb{R}$, τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων και το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ είναι 8 τ.μ, να βρείτε τις τιμές του k

ΑΣΚΗΣΗ 65

Αν α , β , γ είναι μήκη πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $a^2x - \gamma^2(x+1) - \beta^2x(x+1) = 0$, δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ 66

Δίνεται η εξίσωση, $x^2 + (k - 2)x + 8 = 0$ με k πραγματικό αριθμό.

Να βρείτε τον αριθμό k, ώστε η εξίσωση να έχει δύο πραγματικές ρίζες, ρ_1, ρ_2 , τέτοιες ώστε $\rho_1 = \rho_2^2$

ΑΣΚΗΣΗ 67

Δίνεται η εξίσωση $(8k - 3)x^2 - \sqrt{8k}x + 1 = 0$, με k πραγματικό αριθμό.

- Για ποιες τιμές του k έχει μοναδική ρίζα? Ποια είναι η ρίζα της εξίσωσης?
- Για ποιές τιμές του k έχει δύο ίσες ρίζες? Ποια είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης?

ΑΣΚΗΣΗ 68

Να λυθούν οι εξισώσεις :

- $\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} - \frac{x^2 - 5}{x^2 - 9} = 1$
- $(x^2 + 6x - 7)^2 - x^2 - 6x = -7$
- $|-2x^2 + x - 1| - |2x^2 + 2x + 1| = 0$
- $x(x+1)(x^2 + x + 1) = 42$
- $(x+2)^4 - 2(x^2 - 4x + 4) - 8 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 69

Να λύσετε την εξίσωση $|k^2 + 2|x - 2k = 3x + k^2 + 1$, για όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού k .

ΑΣΚΗΣΗ 70

Αν για κάθε $x \in R$, ισχύει $4x^2 - 4kx + (3k - 2) > 0$, $k \in R$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^2 - 4x\sqrt{3k} + k^2 = 0$, έχει δύο άνισες και θετικές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ 71

Δίνεται η εξίσωση, $x^2 + x - 2|x| + k - 1 = 0$. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού k , έχει τέσσερις πραγματικές και άνισες ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ 72

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - (k+1)x - 4 = 0$ (I) και $x^2 - kx - 3 = 0$ (II) .

- A. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (I) και (II) , έχουν πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού k .
- B. Αν οι ρίζες της (I) είναι ρ, ρ_1 και της (II) ρ, ρ_2 με $\rho_2 < \rho_1$, τότε να βρείτε :
- Τη διαφορά $\rho_1 - \rho_2$
 - την κοινή ρίζα ρ
 - το άθροισμα $\rho_1 + \rho_2$,
 - τις ρίζες ρ_1, ρ_2 και τον αριθμό k

ΑΣΚΗΣΗ 73

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (k-2)x - 4 = 0$, με $k \in R$

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $k \in R$
- Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης και $\rho_1 > \rho_2$, να βρείτε την τιμή του k , ώστε $\rho_1 - \rho_2 = 5$
- Να βρείτε την τιμή του k , ώστε η εξίσωση να έχει αντίθετες ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ 74

Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + 2x - (3k+1) = 0$, $k \in R$

- α) Για ποιες τιμές του k η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.
 β) Αν ρ_1, ρ_2 οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 \neq \rho_2$ και $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1$, να βρείτε την τιμή του k .

ΑΣΚΗΣΗ 75

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (k-2)x - (2k+1) = 0$, $k \in R$

- α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε $k \in R$
 β) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης και $\rho_1^2 + \rho_2^2 - 3\rho_1\rho_2 = 29 - 2k$, να βρεθεί η τιμή του k

ΑΣΚΗΣΗ 76

Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί και $\alpha \neq 0$ και $|\alpha| + |\gamma| < \beta$, αποδείξτε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ 77

Αν η εξίσωση $x^2 - (2\alpha + \beta)x + 2\alpha^2 + \beta^2 - \beta + \frac{1}{2} = 0$, έχει πραγματικές ρίζες, να βρείτε τις τιμές των α και β .

ΑΣΚΗΣΗ 78

Αν a ρίζα της εξίσωσης $x^2 - x - 3 = 0$, να αποδείξετε ότι :

$$\frac{a^3 + 1}{a^5 - a^4 - a^3 + a^2} = \frac{4}{9}$$

ΑΣΚΗΣΗ 79

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (k-2)x + \frac{k^2}{4} - k = 0, k \in R$$

- α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες.
 β) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης και $\rho_1^2 > k^2, \rho_2^2 > k^2$, να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού k

ΑΣΚΗΣΗ 80

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2k - 3)x + 1 - 3k = 0$, $k \in R$

Για ποιες τιμές του k , η εξίσωση έχει δύο ρίζες αρνητικές.

ΑΣΚΗΣΗ 81

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(k - 1)x + k - 3 = 0$, $k \in R$

Για ποιες τιμές του k η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές και ομόσημες ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ 82

Η ανίσωση $x^2 - 2kx + 3k - 2 > 0$, αληθεύει για κάθε $k \in R$

Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Pi = |k - 1| + |k - 2| + |k - 3| + |k| + 2017$ είναι σταθερή.

ΑΣΚΗΣΗ 83

Έστω $P(x) = x^2 - 7x + 12$

- α) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$
- β) Αν ο αριθμός k ανήκει στο σύνολο λύσεων της ανίσωσης, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Pi = |k| - 4|k - 3| - 3|k - 4|$ είναι σταθερή.

ΑΣΚΗΣΗ 84

Αν η εξίσωση $x^2 - 5x - 1 = 0$, έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 , να αποδείξετε ότι :

$$2\rho_1^3 - 3\rho_1^2\rho_2 - 3\rho_1\rho_2^2 + 2\rho_2^3 = 170$$

ΑΣΚΗΣΗ 85

Έστω $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$

- α) Να μετατρέψετε σε γινόμενο παραγόντων το $P(x)$.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = k + 3$, $k \in R$
- γ) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του k ώστε η παραπάνω εξίσωση να έχει θετικές λύσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 86

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x-5 & |x| < 2 \\ \frac{1}{x} & |x| \geq 2 \end{cases}$$

Να λύσετε την εξίσωση $kx - f(-4) = kf(0)$ για όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού k

ΑΣΚΗΣΗ 87

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1} \text{ και η ευθεία } (\varepsilon): y = \beta$$

- Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R}
- Για ποιες τιμές του β η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την ευθεία (ε)

ΑΣΚΗΣΗ 88

$$\text{Έστω η παράσταση } A = \sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} \text{ και η εξίσωση } (x-1)^3 = A^4$$

- Να αποδείξετε ότι $A = \sqrt[4]{8}$
- Να λύσετε την εξίσωση

ΑΣΚΗΣΗ 89

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- Να λύσετε την ανίσωση $\left| \frac{1}{f(x)} \right| \geq \frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 90

$$\text{Αν } \alpha + \beta = \sqrt{7+4\sqrt{3}} \text{ και } \alpha - \beta = \sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ να βρείτε την τιμή της παράστασης } A = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 91

$$\text{Αν } x > 2 \text{ να αποδείξετε ότι } \sqrt{x^2+5x+11} + \sqrt{4-4x+x^2} = x+3$$

ΑΣΚΗΣΗ 92

Αν $\alpha = \sqrt{75}$, $\beta = \sqrt[3]{5\sqrt{5}}$, $\gamma = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

ΑΣΚΗΣΗ 93

Αν $\alpha > 0$ και $\frac{\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt[6]{\alpha}}{\sqrt[4]{\alpha^3\alpha}} = 3$, να βρείτε την τιμή του α .

ΑΣΚΗΣΗ 94

Αν οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και ισχύει $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt{5}$, να αποδείξετε ότι $\left| \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right| = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 95

Αν οι αριθμοί $\alpha = x + \sqrt{x^2 + 1}$, και $\beta = y + \sqrt{y^2 + 1}$, είναι αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x και y είναι αντίθετοι.

ΑΣΚΗΣΗ 96

Αν $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $\beta = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, $\gamma = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 97

Έστω οι παραστάσεις $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ και $B = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

- α) Να αποδείξετε ότι: $A = 4$ και $B = 1$
- β) Να λύσετε τις εξισώσεις: ι) $(x-1)^3 = -2A$, υ) $|x-2| = B$
- γ) Να λύσετε την ανίσωση: $|x| > A + B$

ΑΣΚΗΣΗ 98

Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{5}$

ΑΣΚΗΣΗ 99

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 6}$.

Να βρείτε :

- α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
 β) Την τιμή της παράστασης $A = \frac{f(7)}{f(0)-1} + \frac{f(0)}{f(7)+1}$

ΑΣΚΗΣΗ 100

Αν ισχύει $\alpha + \sqrt{\alpha} = 1$ τότε :

- α) Να αποδείξετε ότι : $0 < \alpha < 1$
 β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης : $A = \alpha + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

ΑΣΚΗΣΗ 101

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $|a^2 - \beta| + \beta = 0$, τότε , να αποδείξετε ότι :

- α) $\beta \leq 0$
 β) $\alpha = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 102

Να αποδείξετε ότι : $|x^2 + 2x + 2| + 6 = |x^2 + 2x + 8|$

ΑΣΚΗΣΗ 103

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων

$$||x-1|-3| < 5 \quad \text{και} \quad x^2 - 13x + 30 \leq 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 104

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - kx + 1 = 0$ και $x^2 - x + k = 0$. Αν έχουν κοινή ρίζα να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού k

ΑΣΚΗΣΗ 105

Έστω οι πραγματικοί αριθμοί α και β με $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Αν η εξίσωση $(2\alpha - \beta)x^2 - 4\alpha x + 4\beta = 0$, έχει διπλή πραγματική ρίζα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 2x + 3(\alpha - \beta) = 0$, έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ 106

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 2x + 2k = ky$ και $(\varepsilon_2): x + y = 2$ με $k \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές του k ώστε οι ευθείες

- α) Να τέμνονται στον άξονα $x'x$
- β) Να τέμνονται στον άξονα $y'y$

ΑΣΚΗΣΗ 107

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 7(x+1) & x \geq 3 \\ 5\alpha x - 2 & x \leq 3 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$

Να βρείτε τις τιμές του λ όταν: $-\frac{5}{8}f(1) \cdot |\lambda + 1| = (\lambda + 1)^2 + 3f(0)$

ΑΣΚΗΣΗ 108

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) γνωρίζουμε ότι: $\alpha_7 = 23$ και $\alpha_{10} = 32$.

Να βρείτε:

- α) Τον 1^ο όρο και την διαφορά της προόδου
- β) Τον 20^ο όρο της προόδου
- γ) Ποιος όρος της προόδου ισούται με 26
- δ) Το άθροισμα των 26 πρώτων όρων της προόδου

ΑΣΚΗΣΗ 109

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) γνωρίζουμε ότι $\alpha_1 = k$ και $\omega = 1 - 2k$, $k \neq \frac{1}{2}$.

Να βρείτε τον όρο της προόδου που ισούται με $14 - 27k$

ΑΣΚΗΣΗ 120

Να προσδιορίσετε τον αριθμό k , ώστε ο $k^2 + k$ να είναι αριθμητικός μέσος των $4k^2 + k$ και $6k - 3$

ΑΣΚΗΣΗ 121

Να βρείτε πόσοι όροι της αριθμητικής προόδου $58, 55, 52, \dots$ έχουν άθροισμα ίσο με 578.

ΑΣΚΗΣΗ 122

Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :

$$\alpha) S = -5 - 3 - 1 + 3 \dots + 65$$

$$\beta) S = \alpha + (\alpha - \beta) + (\alpha - 2\beta) + \dots + (\alpha - 59\beta)$$

$$\gamma) S = 1 - 4 + 6 - 7 + 11 - 10 + \dots \text{ με πλήθος όρων } 2n$$

ΑΣΚΗΣΗ 123

Σε μια αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = 2$ είναι : $a_n = 18$ και $S_n = 88$. Να βρείτε τον πρώτο όρο και το πλήθος των όρων της προόδου.

ΑΣΚΗΣΗ 124

Να λύσετε την εξίσωση : $(x+2) + (x+4) + (x+6) + \dots + (x+60) = 1050$

ΑΣΚΗΣΗ 125

Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου $1, 5, 9, 11, \dots$ που απαιτούνται, ώστε το άθροισμα τους να ξεπερνάει το 190

ΑΣΚΗΣΗ 126

Να βρεθεί αριθμητική πρόοδος στην οποία το άθροισμα του τέταρτου και του δωδέκατου όρου είναι 70, ενώ ο δεύτερος και ο όγδοος διαφέρουν κατά 24.

ΑΣΚΗΣΗ 127

Να βρεθούν 3 αριθμοί, διαδοχικοί σε αριθμητική πρόοδο, όταν το άθροισμα τους είναι 18 και το γινόμενο τους είναι 66.

ΑΣΚΗΣΗ 128

Ποιους αριθμούς πρέπει να τοποθετήσουμε ανάμεσα στους αριθμούς 2 και 122, ώστε να προκύψουν 21 διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΑΣΚΗΣΗ 129

Αν για κάθε τιμή του αριθμού, $n \in \mathbb{N}^*$ το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας (a_n) είναι ίσο με $3n^2 - n$, να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

ΑΣΚΗΣΗ 130

Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι και οι αριθμοί $\alpha^2 - \beta\gamma, \beta^2 - \alpha\gamma, \gamma^2 - \alpha\beta$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΑΣΚΗΣΗ 131

Το άθροισμα των 7 πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι μεγαλύτερο του 42 και μικρότερο του 56. Αν οι όροι της είναι ακέραιοι αριθμοί και ο πρώτος όρος είναι 4, να βρείτε την πρόοδο

ΑΣΚΗΣΗ 132

Οι αριθμοί $x-3, 1-2x, 3x-11$, είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

A. Να βρείτε

- α) τον πραγματικό αριθμό x
- β) τη διαφορά ω της προόδου

B. Αν ο αριθμός $1-2x$ είναι ο πέμπτος όρος της προόδου, να βρείτε :

- α) Τον πρώτο όρο της προόδου
- β) Το άθροισμα των δώδεκα πρώτων όρων της προόδου.

ΑΣΚΗΣΗ 133

Σε μια αριθμητική πρόοδο (a_n) έχουμε : $a_1 = 2$ και $a_5 = 4$

α. Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου

- β. Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε για να πάρουμε άθροισμα $\frac{99}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 134

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) , ισχύουν οι σχέσεις :

$$S_5 = 5 \text{ και } \alpha_2 + \alpha_7 + \alpha_{12} = 15$$

Να βρείτε :

- Τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου
- Τον θετικό ακέραιο n για τον οποίο ισχύει $S_n = 14$

ΑΣΚΗΣΗ 135

Σε μια αριθμητική πρόοδο ισχύει $S_{10} = S_{20}$. Να αποδείξετε ότι $S_{30} = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 136

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x + 2}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να αποδείξετε ότι $(f(5) + f(2)) \cdot (\sqrt{13} - \sqrt{6}) = (f(3))^2$
- Να βρείτε την εξίσωση η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς :

$$\rho_1 = \frac{1}{f(0)-1} \text{ και } \rho_2 = 1 - f(0)$$

ΑΣΚΗΣΗ 137

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - 9}{|x| - 3}$

- Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
- Να αποδείξετε ότι $A = |x| + 3$
- Να λύσετε την ανίσωση $A > 5$

ΑΣΚΗΣΗ 138

Δίνονται τα σημεία $K(0, 2)$ και $\Lambda(-1, 3)$.

A. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία Κ και Λ

B. Αν η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y = -x + 2$ και τα σημεία Κ, Λ και $M(1 - \lambda^2, 4\lambda - 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι συνευθειακά, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$

β. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία $\varepsilon: y + 8x = \lambda^3 x - 5$ με τον άξονα x'

ΑΣΚΗΣΗ 139

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4|x| - 6}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{|x| + 2}{|x| + 3}$ για κάθε $x \in A$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) \cdot (|x| + 3) = 3$

δ. Να λύσετε την ανίσωση $10 \cdot f(x) \geq |x| + 6$

ΑΣΚΗΣΗ 140

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda + 2)x^2 - 5\lambda x - 2$ και $\lambda \neq -2$

Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ και S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της τότε:

α. Να δείξετε ότι $(S - x_1)(S - x_2) = P$

β. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να ισχύει: $(S - x_1)(S - x_2) \leq S$

ΑΣΚΗΣΗ 141

Αν η εξίσωση $(\alpha^2 - 4) \cdot x = 3 \cdot \alpha - 6$ είναι αόριστη, τότε :

α. Να λύσετε την εξίσωση: $(\alpha^2 - 3 \cdot \alpha + 2) \cdot x = \alpha + 7$

β. Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 8| = \alpha$

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $|2x + 4| < \alpha$

ΑΣΚΗΣΗ 142

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα θεωρίας :

α) Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $ax^2+bx+\gamma=0$, $a \neq 0$, να αποδείξετε ότι

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

β) Αν $\theta > 0$ να αποδείξετε ότι $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

γ) Να αποδείξετε ότι:

Η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο αριθμών είναι ίση με το γινόμενο των απολύτων τιμών τους, δηλαδή $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

δ) Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$

ε) Δίνονται οι διακεκριμένες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις

$$\varepsilon_1 : y = a_1 x + \beta_1 \text{ και } \varepsilon_2 : y = a_2 x + \beta_2. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

ΑΣΚΗΣΗ 143

Να χαρακτηρίσετε με τη λέξη Σωστό ή την λέξη Λάθος τις προτάσεις:

α) Η εξίσωση $|x^2 + 5| + |x^2 - 9| = 0$ έχει μία πραγματική λύση

β) Η εξίσωση $|x| + 2 = 0$ είναι αδύνατη

γ) $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} = 3 - \sqrt{10}$

δ) η τετραγωνική ρίζα του $4 - 2\sqrt{3}$ είναι ο $\sqrt{3} - 1$

ε) Αν $\alpha \leq 0$ και $\beta \leq 0$ τότε ισχύει $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{-\alpha} \cdot \sqrt{-\beta}$

στ) Η ευθεία $y = (\kappa^2 + 1)x - 3$ σχηματίζει με τον $x'x$ οξεία γωνία.

ζ) Ισχύει ότι $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{10}$

ΑΣΚΗΣΗ 144

Να χαρακτηρίσετε με τη λέξη Σωστό ή την λέξη Λάθος τις προτάσεις:

- α) Αν $x \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει πάντα $\sqrt{x^2} = x$
- β) Η εξίσωση $\chi^v = a$ με v άρτιο και $a < 0$ έχει δύο ακριβώς λύσεις : τις $\sqrt[v]{a}$, και $-\sqrt[v]{a}$
- γ) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{x-2}$, είναι το $(-\infty, 2]$
- δ) Η γραφική παράσταση της $f(x) = -4x + \beta$ σχηματίζει με τον άξονα $\chi' \chi$ αμβλεία γωνία
- ε) Αν S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο δύο αριθμών x_1 και x_2 , τότε η εξίσωση $x^2 - Px + S = 0$ έχει λύσεις τους αριθμούς x_1 και x_2 .
- στ) Αν α , β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$, τότε $[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x \leq \beta\}$.
- ζ) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ΑΣΚΗΣΗ 1451. Αν $x < 1$ τότε

$$\alpha) -3x+4 < 7 \quad \beta) -3x+4 > 5 \quad \gamma) -3x+4 > 1 \quad \delta) -3x+4 < -1$$

2. Το $|\alpha|$ είναι ίσο με:

$$\alpha) \alpha \quad \beta) -\alpha \quad \gamma) \pm\alpha$$

3. Η $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ είναι ίση με:

$$\alpha) 2+\sqrt{5} \quad \beta) \sqrt{5}-2 \quad \gamma) 2-\sqrt{5}$$

4. Αν $x^3 = -5$ τότε :

$$\alpha) x = -\sqrt[3]{5} \quad \beta) x = \pm\sqrt[3]{5} \quad \gamma) x = \sqrt[3]{5} \quad \delta) x = \sqrt[3]{-5}$$

5. Η ευθεία (ε): $\psi = 3\chi + 1$ είναι παράλληλη με την ευθεία :

$$\alpha) \psi = -3\chi + 1 \quad \beta) \psi = 3\chi - 7 \quad \gamma) \psi = -3\chi$$

ΑΣΚΗΣΗ 146

Να χαρακτηρίσετε με τη λέξη Σωστό ή την λέξη Λάθος τις προτάσεις:

α. Η ισότητα $|\mathbf{x}| = -\mathbf{x}$ ισχύει όταν $\mathbf{x} \leq 0$.

β. Ισχύει $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, όπου $x, y > 0$

γ. Ισχύει πάντα: $|x-y| = |x| - |y|$.

δ. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με α, γ ετερόσημους αριθμούς έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

ε. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε ισχύει πάντα $\alpha\gamma > \beta\delta$

ΑΣΚΗΣΗ 147

Πότε και πως παραγοντοποιείται το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ για τις διάφορες τιμές της διακρίνουσας Δ

Να αντιγράψετε στη κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα σωστά συμπληρωμένο.

<u>ΤΡΙΩΝΥΜΟ</u>	<u>ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ</u>	<u>ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ</u>
$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,$ $\alpha \neq 0$		

ΑΣΚΗΣΗ 148

Να χαρακτηρίσετε με τη λέξη Σωστό ή την λέξη Λάθος τις προτάσεις:

α) Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ για $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ είναι ταυτότητα.

β) Η εξίσωση $x^v = \alpha$ με $\alpha < 0$ και v περιττό έχει ακριβώς μια λύση την $-(\sqrt[v]{|\alpha|})$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha < 0$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω με $0^\circ < \omega < 90^\circ$.

δ) Το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ γίνεται ετερόσημο του α , μόνον όταν είναι $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x που βρίσκονται εκτός των ριζών

ΑΣΚΗΣΗ 149

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις .

α) Η εξίσωση $ax + \beta = 0$ για έχει μοναδική λύση την $x = \dots\dots\dots$

β) Για κάθε πραγματικό a ισχύει: $\sqrt{a^2} = \dots\dots\dots$

γ) Ισχύει: $\sqrt[n]{a \cdot \beta} = \dots\dots\dots$ όπου a, β θετικοί και $n \dots\dots\dots$

δ) Η εξίσωση $ax + \beta = 0$ είναι αδύνατη αν και

ε) Η απόσταση $d(a, \beta)$ δύο πραγματικών αριθμών a, β ισούται με

στ) Αν $a > 0, \beta > 0$ και $n \in \mathbb{N}^*$ τότε ισχύει: $\sqrt[n]{a^n \cdot \beta} = \dots\dots\dots$

ΑΣΚΗΣΗ 150

Να γίνει η σωστή αντιστοίχιση στον παρακάτω πίνακα

Η εξίσωση $ax + \beta = 0$:

1. Είναι Αόριστη	(Α) $a \neq 0$
2. Είναι Αδύνατη στο \mathbb{R}	(Β) $a = 0$ και $\beta = 0$
3. Έχει μοναδική λύση	(Γ) $a = 0$ και $\beta \neq 0$