Σελ. 194 – Άσκηση GI_ALG_4_4551

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = [-(\lambda^2+1)]^2 - 4\lambda\cdot\lambda = (\lambda^2-1)^2 \geq 0$,
οπότε έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$.

β) Έχουμε ότι: $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και $P = x_1x_2 = \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1$.

γ) i) Αφού P = 1 > 0, οι ρίζες x_1, x_2 είναι ομόσημες.
Αφού επιπλέον ισχύει λ < 0, έχουμε ότι S < 0, οπότε οι ρίζες x_1, x_2 είναι αρνητικές.

ii) Αφού $P = x_1x_2 = 1 > 0$ ισχύει:

$$\left|\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2+1}{|\lambda|} \geq 2 \Leftrightarrow \lambda^2+1 \geq 2|\lambda| \Leftrightarrow |\lambda|^2+1-2|\lambda| \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(|\lambda|-1\right)^2 \geq 0$, η οποία ισχύει, άρα και η αρχική, οπότε $|x_1+x_2| \geq 2x_1x_2$.

Σελ. 195 – Άσκηση GI_ALG_4_4558

α) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $A_f = \mathbb{R}$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = [-(\lambda^2+1)]^2 - 4\lambda\cdot\lambda = (\lambda^2-1)^2 \geq 0$,
οπότε έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda > 0$.

Οι ρίζες είναι: $x = \dfrac{-[-(\lambda^2+1)] \pm \sqrt{(\lambda^2-1)^2}}{2\lambda} = \dfrac{(\lambda^2+1) \pm (\lambda^2-1)}{2\lambda}$, δηλαδή

$x_1 = \dfrac{\lambda^2+1+\lambda^2-1}{2\lambda} = \dfrac{2\lambda^2}{2\lambda} = \lambda$ και $x_2 = \dfrac{\lambda^2+1-\lambda^2+1}{2\lambda} = \dfrac{2}{2\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$,

οι οποίες είναι θετικές, αφού $\lambda > 0$.

β) i) Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι: $E = x_1 x_2 = \lambda \cdot \dfrac{1}{\lambda} = 1$, για $\lambda > 0$.

ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2\lambda + \dfrac{2}{\lambda}$, για $\lambda > 0$.

Για $\lambda > 0$, ισχύει:

$2\lambda + \dfrac{2}{\lambda} \geq 4 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 \geq 4\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \geq 0$,

η οποία ισχύει άρα και η αρχική, οπότε $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$.

iii) $\Pi = 4 \Leftrightarrow 2\lambda + \dfrac{2}{\lambda} = 4 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$,

οπότε έχουμε $x_1 = x_2 = 1$, δηλαδή το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Σελ. 196 – Άσκηση GI_ALG_4_4575

α) Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $A_f = A_g = \mathbb{R}$.

Αφού $f(2) = g(2)$, έχουμε ότι:

$2^2 - 4\cdot 2 + \alpha = 2\alpha - 5 \Leftrightarrow 4 - 8 + \alpha = 2\alpha - 5 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

β) Για α = 1 έχουμε $f(x) = x^2 - 4x + 1$ και $g(x) = x - 5$.

i) Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$,

αφού το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 1 \text{ και ρίζες } x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases},$$

οπότε έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda > 0$.

ii) Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 \geq x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ ή $x \geq 3$, αφού

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$|f(x) - g(x)| \geq f(x) - g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \leq 2$ ή $x \geq 3$.

Σελ. 197 – Άσκηση GI_ALG_4_4607

α) Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 1$,

αφού το τριώνυμο $x^2 - x$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 0\cdot 0 = 1, \text{ ρίζες } x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1}}{2\cdot 1} = \begin{cases} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{1-1}{2} = 0 \end{cases}$$

και ισχύει

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

β) i) Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι για $x > 1$, ισχύει $x^2 > x$ **(Ι)**.

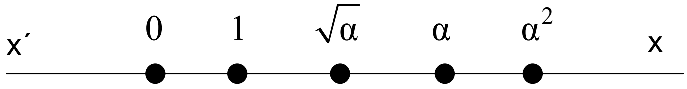
Συνεπώς όταν $\alpha > 1$, ισχύει $\sqrt{\alpha} > 1$ **(ΙΙ)**,

ενώ

- από την (Ι) για $x = \alpha$ ισχύει: $\alpha^2 > \alpha$ **(ΙΙΙ)**,
- από την (Ι) για $x = \sqrt{\alpha}$ ισχύει: $\alpha > \sqrt{\alpha}$ **(IV)**.

Επομένως από τις (ΙΙ), (ΙΙΙ) , (IV) προκύπτει: $\alpha^2 > \alpha > \sqrt{\alpha} > 1 > 0$,

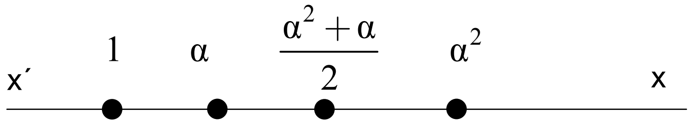
άρα



ii) Έχουμε ότι:

- $\alpha^2 > \frac{\alpha + \alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2\alpha^2 > \alpha + \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 > \alpha$, η οποία ισχύει λόγω της (ΙΙΙ) και
- $\frac{\alpha + \alpha^2}{2} > \alpha \Leftrightarrow \alpha + \alpha^2 > 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 > \alpha$, η οποία ισχύει λόγω της (ΙΙΙ).

Συνεπώς ισχύει ότι: $\alpha^2 > \frac{\alpha + \alpha^2}{2} > \alpha$, άρα



Μια άλλη προσέγγιση είναι να παρατηρήσουμε ότι το σημείο του άξονα με τετμημένη $\frac{\alpha + \alpha^2}{2}$ είναι το μέσο των σημείων με τετμημένες α^2 και α.

Σελ. 198 – Άσκηση GI_ALG_4_4629

α) Αφού το μυρμήγκι κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2 cm μεγαλύτερη, οι αποστάσεις που διανύει κάθε λεπτό το μυρμήγκι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ με διαφορά $\omega = 2$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$.

Συνεπώς: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 1 + (\nu - 1) \cdot 2 = 2\nu - 1, \nu \in \mathbb{N}^*$.

β) Αν $S_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ είναι η συνολική απόσταση που διένυσε η αράχνη,

θα ισχύει $S_\nu = \dfrac{2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu = \dfrac{2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2}{2} \cdot \nu = \nu^2, \nu \in \mathbb{N}^*$.

Συνεπώς: $S_5 = 5^2 = 25$, άρα τα πέντε πρώτα λεπτά της κίνησης κάλυψε 25 cm.

γ) Αναζητούμε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε $S_\nu = 100$ (1 m = 100 cm), άρα

$$\frac{2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2}{2} \cdot \nu = 100 \Leftrightarrow (1 + \nu - 1) \cdot \nu = 100 \Leftrightarrow \nu^2 = 100 \Leftrightarrow \nu = 10,$$

αφού $\nu \in \mathbb{N}^*$, οπότε σε 10 λεπτά θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού.

δ) i) Αφού η αράχνη κάθε λεπτό διανύει διπλάσια απόσταση κατά 2 cm μεγαλύτερη, οι αποστάσεις που διανύει κάθε λεπτό είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ με λόγο $\lambda = 2$ και πρώτο όρο $\beta_1 = 1$.

Συνεπώς: $\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 2^{\nu-1}, \nu \in \mathbb{N}^*$.

ii) Αν $\Sigma_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ είναι η συνολική απόσταση που διένυσε η αράχνη,

θα ισχύει $\Sigma_\nu = \beta_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 2^\nu - 1, \nu \in \mathbb{N}^*$.

Το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν σε απόσταση 1 cm, όταν το άθροισμα των αποστάσεων που θα έχει διανύσει το καθένα είναι 99 cm.

$\nu \in \mathbb{N}^*$	S_ν	Σ_ν	Σύνολο
1	1	1	2
2	4	3	7
3	9	7	16
4	16	15	31
5	25	31	56
6	36	63	99
7	49	127	176

Συνεπώς στα 6 λεπτά η απόσταση μυρμηγκιού αράχνης θα είναι 1 cm.

Σελ. 199 – Άσκηση GI_ALG_4_4647

α) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $A_f = \mathbb{R}$.

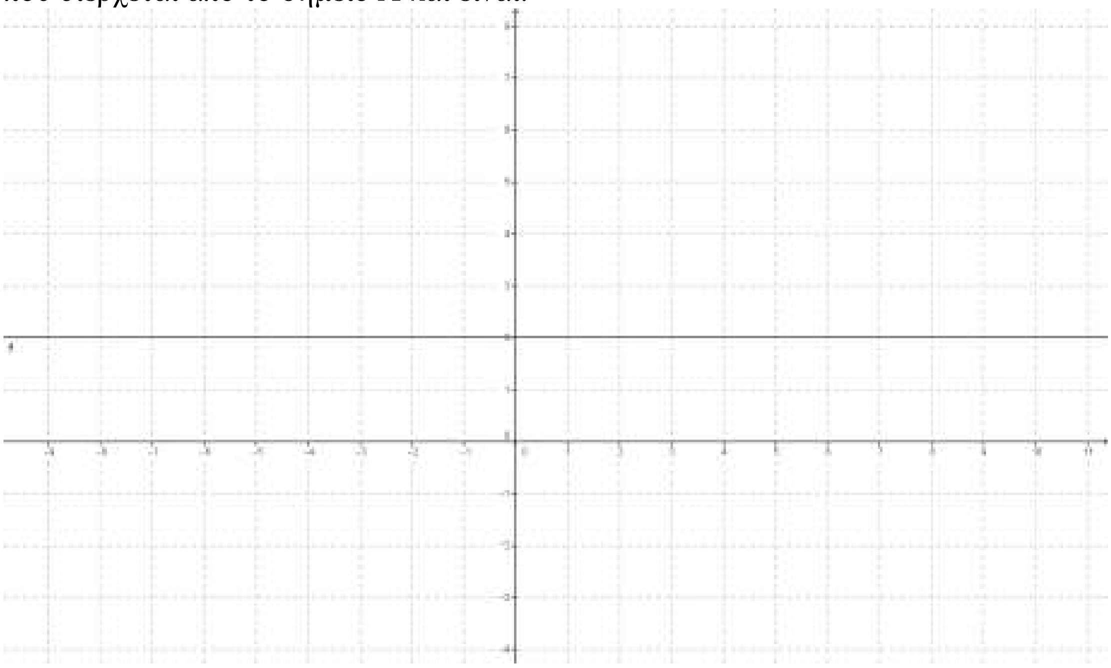
Ισχύει ότι:

$f(0) = (\lambda+1)\cdot 0^2 - (\lambda+1)\cdot 0 + 2 = 2$,

οπότε η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(0, 2).

β) Για $\lambda = -1$ έχουμε ότι $f(x) = (-1+1)\cdot x^2 - (-1+1)\cdot x + 2 = 2$,

οπότε η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ που διέρχεται από το σημείο Α και είναι:



γ) Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Β(2, 0) ισχύει f(2) = 0,

οπότε $(\lambda+1)\cdot 2^2 - (\lambda+1)\cdot 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 4 - 2\lambda - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = -2$.

δ) Για $\lambda = 1$ έχουμε ότι $f(x) = (1+1)\cdot x^2 - (1+1)\cdot x + 2 = 2x^2 - 2x + 2$.

Το τριώνυμο $2x^2 - 2x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = -4 < 0$,

οπότε $2x^2 - 2x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x.

Σελ. 200 – Άσκηση GI_ALG_4_4654

α) Το τριώνυμο $\omega^2-7\omega+12$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=7^2-4\cdot1\cdot12=1 \text{ και ρίζες } \omega=\frac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\begin{cases}\dfrac{7+1}{2}=4\\ \dfrac{7-1}{2}=3\end{cases}.$$

Συνεπώς:

$$x^4-7x^2+12=0 \overset{x^2=\omega\geq0}{\Leftrightarrow} \omega^2-7\omega+12=0 \Leftrightarrow \omega=3 \text{ ή } \omega=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=3 \text{ ή } x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3} \text{ ή } x=\pm2.$$

Συνεπώς η διτετράγωνη εξίσωση $x^4-7x^2+12=0$ έχει τέσσερις ρίζες τις $x=\pm\sqrt{3}$ ή $x=\pm2$.

β) Το τριώνυμο $\omega^2+\beta\omega+\gamma$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\gamma>0 \text{ και ρίζες } \omega=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}.$$

- Αφού $\beta<0$, έχουμε ότι $\omega=\dfrac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}>0$.
- Επίσης αφού $\beta<0$, έχουμε ότι $-\beta-\sqrt{\beta^2-4\gamma}>0 \Leftrightarrow (-\beta)^2>\sqrt{\beta^2-4\gamma}^{\,2} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \beta^2>\beta^2-4\gamma \Leftrightarrow 4\gamma>0 \Leftrightarrow \gamma>0$, η οποία ισχύει, άρα και η αρχική.

Συνεπώς: $\omega=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}>0$.

Τότε:

$$x^4+\beta x^2+\gamma=0 \overset{x^2=\omega\geq0}{\Leftrightarrow} \omega^2+\beta\omega+\gamma=0 \Leftrightarrow \omega=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2} \text{ ή } x^2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}} \text{ ή } x=\pm\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}}.$$

Συνεπώς η διτετράγωνη εξίσωση $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ έχει τέσσερις ρίζες τις

$$x=\pm\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}} \text{ ή } x=\pm\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\gamma}}{2}}.$$

Σελ. 201 – Άσκηση GI_ALG_4_4656

α) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $A_f = \mathbb{R}$.

Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$,
οπότε $x^2 + x + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

β) Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$f(x) < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$,

αφού το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \text{ και ρίζες } x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases},$$

ενώ ισχύει

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Συνεπώς οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 3$ ανήκουν στο διάστημα $(-1, 2)$.

γ) Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$,

δηλαδή το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 3$ (λόγω του (β) ερωτήματος).

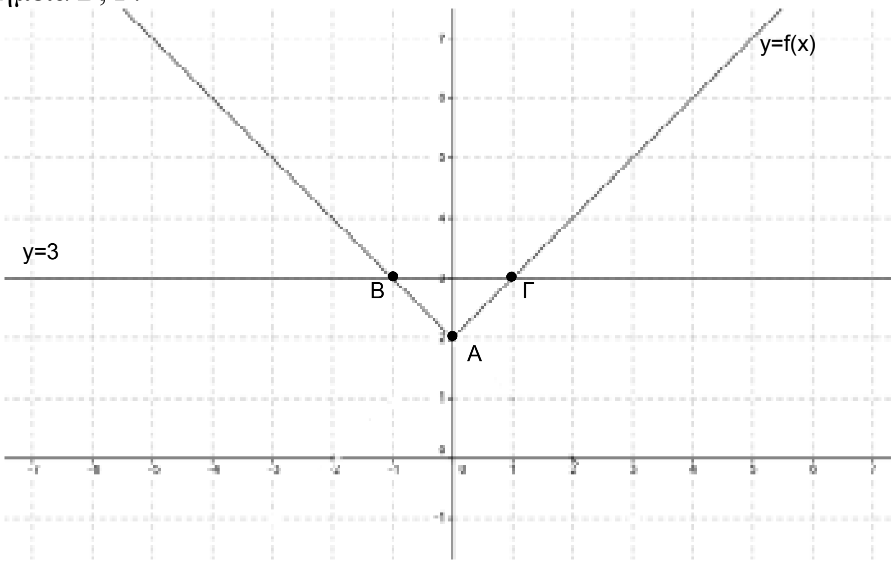
Σελ. 202 – Άσκηση GI_ALG_4_4657

α) Έχουμε ότι: $f(0)=0+2=2$, δηλαδή η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Α(0, 2).

β) i) Για x < 0 έχουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημιευθεία ΑΒ χωρίς την αρχή της Α, όπου Α(0, 2) και Β(−1, 3).

Για x ≥ 0 έχουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι η ημιευθεία ΑΓ με Γ(1, 3).

Η ευθεία με εξίσωση y = 3 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ που διέρχεται από τα σημεία Β, Γ.



Τα σημεία τομής τους είναι τα Β(−1, 3) και Γ(1, 3).

ii) Τα σημεία Β και Γ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$, αφού έχουν αντίθετες τετμημένες και ίσες τεταγμένες.

γ) i) Η ευθεία με εξίσωση y = α τέμνει την C_f σε δύο σημεία για κάθε α > 2.

ii) Παρατηρούμε ότι $f(x)=|x|+2$.

Αναζητούμε τα $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ να έχει δύο λύσεις.

Συνεπώς:

$f(x)=\alpha \Leftrightarrow |x|+2=\alpha \Leftrightarrow |x|=\alpha-2$ **(Ι)**.

- Αν α – 2 < 0 ⇔ α < 2 , η εξίσωση (Ι) είναι αδύνατη.
- Αν α – 2 = 0 ⇔ α = 2 , η εξίσωση (Ι) έχει μοναδική λύση x = 0.
- Αν α – 2 > 0 ⇔ α > 2 , η εξίσωση (Ι) έχει δύο λύσεις x = ±(α – 2).

Σελ. 203 – Άσκηση GI_ALG_4_4659

α) Έχουμε ότι:

$$|\alpha| \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow |\alpha|^2 \le \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \le \frac{25}{4} \Leftrightarrow 4\alpha^2 \le 25 \Leftrightarrow \ 25-4\alpha^2 \ge 0 .$$

Το τριώνυμο $\alpha x^2 - 5x + \alpha \ (\alpha \ne 0)$

έχει διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4\alpha\cdot\alpha = 25 - 4\alpha^2 \ge 0$,

οπότε η εξίσωση $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$ έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς.

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, το γινόμενο των ριζών είναι $P = x_1 x_2 = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$, δηλαδή οι ρίζες x_1, x_2 είναι αντίστροφες.

β) Αν α = 2 η εξίσωση είναι η $2x^2 - 5x + 2 = 0$,

έχει διακρίνουσα $\Delta = 25 - 4\cdot 2^2 = 9$ και ρίζες $x = \dfrac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \begin{cases} \dfrac{5+3}{4} = 2 \\ \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

γ) Για x ≠ 0, έχουμε:

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x+\frac{1}{x}\right) + 2 = 0 \overset{\omega = x+\frac{1}{x}}{\Leftrightarrow} 2\omega^2 - 5\omega + 2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2 \text{ ή } \omega = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \text{ ή } x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \text{ ή } 2x^2 + 2 = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ ή } 2x^2 - x + 2 = 0 \text{ (αδύνατη)} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

αφού τριώνυμο $2x^2 - x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = -12 < 0$,

οπότε η εξίσωση $2x^2 - x + 2 = 0$ είναι αδύνατη.

Σελ. 204 – Άσκηση GI_ALG_4_4660

α) Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού $A_f = A_g = \mathbb{R}$.

Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$ x = 1 ή x = 4,

αφού το τριώνυμο $x^2 - 5x + 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 9$ και ρίζες $x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$.

Συνεπώς τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων είναι τα Α(1, −1) και Β(4, 8), αφού $f(1) = g(1) = -1$ και $f(4) = g(4) = 8$.

β) Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4$,

αφού

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

γ) Αρκεί να ισχύει f(x) > α για κάθε α < −1.

Τότε:

$x^2 - 2x > \alpha \Leftrightarrow x^2 - 2x - \alpha > 0$, η οποία ισχύει αφού το τριώνυμο $x^2 - 2x - \alpha$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4(-\alpha) = 4 + 4\alpha = 4(1 + \alpha) < 0$.

Συνεπώς κάθε ευθεία με εξίσωση y = α με α < −1 βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Σελ. 205 – Άσκηση GI_ALG_4_4663

α) $(x-2)^2=\lambda(4x-3)\ \Leftrightarrow\ x^2-4x+4=4\lambda x-3\lambda\ \Leftrightarrow\ x^2-4x+4-4\lambda x+3\lambda=0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda=0$, οπότε $\alpha=1$, $\beta=-4(1+\lambda)$, $\gamma=4+3\lambda$.

β) Το τριώνυμο $x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=[-4(\lambda+1)]^2-4\cdot(4+3\lambda)=4[4(\lambda^2+2\lambda+1)-(4+3\lambda)]$$
$$=4(4\lambda^2+8\lambda+4-4-3\lambda)=4(4\lambda^2+5\lambda).$$

Το ελλιπές τριώνυμο $4\lambda^2+5\lambda$ έχει διακρίνουσα $\Delta=5^2-4\cdot4\cdot0=25$,

ρίζες $\lambda=\dfrac{-5\pm\sqrt{25}}{2\cdot4}=\dfrac{-5\pm5}{8}=\begin{cases}\dfrac{-5+5}{8}=0\\ \dfrac{-5-5}{8}=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$, ενώ ισχύει

λ	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		0		$+\infty$
$4(4\lambda^2+5\lambda)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Η εξίσωση $x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, όταν

$\Delta>0\ \Leftrightarrow\ 4(4\lambda^2+5\lambda)>0\ \Leftrightarrow\ \lambda<-\dfrac{5}{4}$ ή $\lambda>0$.

γ) i) Για $\lambda<-\dfrac{5}{4}$ ή $\lambda>0$ η εξίσωση έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες x_1,x_2

με άθροισμα $S=x_1+x_2=-\dfrac{-4(1+\lambda)}{1}=4(1+\lambda)$ και

γινόμενο $P=x_1x_2=\dfrac{4+3\lambda}{1}=4+3\lambda$

ii) Για $\lambda<-\dfrac{5}{4}$ ή $\lambda>0$ έχουμε ότι:

$$A=(4x_1-3)(4x_2-3)=16x_1x_2-12x_1-12x_2+9=16x_1x_2-12(x_1+x_2)+9$$
$$=16(4+3\lambda)-12\cdot4(1+\lambda)+9=64+48\lambda-48-48\lambda+9=25,$$

που είναι ανεξάρτητη του λ.

Σελ. 206 – Άσκηση GI_ALG_4_4665

α) $\Delta = (-\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot[-(\lambda^2+5)] = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20$.

β) Έχουμε $\Delta > 0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Από τους τύπους του Vieta και x_1, x_2 είναι οι δύο άνισες και πραγματικές ρίζες έχουμε ότι:

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{-\lambda}{1} = \lambda$ και $P = x_1 x_2 = \dfrac{-(\lambda^2+5)}{1} = -(\lambda^2+5)$.

Συνεπώς:

$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(\lambda^2+5) - 2\lambda + 4 + 4 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -3$,

αφού το τριώνυμο $-\lambda^2 - 2\lambda + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4(-1)\cdot 3 = 16$ και

ρίζες $\lambda = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2\cdot(-1)} = \dfrac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{-2} = -3 \\ \dfrac{2-4}{-2} = 1 \end{cases}$.

Σελ. 207 – Άσκηση GI_ALG_4_4667

α) Το τριώνυμο x^2-3x-4 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-3)^2-4(-4)\cdot 1=25$

και ρίζες $\lambda=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\dfrac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+5}{2}=4\\ \dfrac{3-5}{2}=-1\end{cases}$.

Συνεπώς $x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow x=4$ ή $x=-1$.

β) i) Για $x=\dfrac{\alpha}{\beta}$ στο τριώνυμο x^2-3x-4, έχουμε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\frac{\alpha}{\beta}-4=\frac{\alpha^2}{\beta^2}-3\frac{\alpha\beta}{\beta^2}-\frac{4\beta^2}{\beta^2}=\frac{\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2}{\beta^2}=\frac{0}{\beta^2}=0,$$

άρα ο αριθμός $\dfrac{\alpha}{\beta}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2-3x-4=0$.

ii) Αφού ο αριθμός $\dfrac{\alpha}{\beta}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2-3x-4=0$, από το (α) ερώτημα έχουμε ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=4$ ή $\dfrac{\alpha}{\beta}=-1$.

Όμως οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι, οπότε η περίπτωση $\dfrac{\alpha}{\beta}=-1$ απορρίπτεται, άρα ισχύει $\dfrac{\alpha}{\beta}=4 \Leftrightarrow \alpha=4\beta$, δηλαδή ο α είναι τετραπλάσιος του β.

Σελ. 208 – Άσκηση GI_ALG_4_4671

α) Αφού η $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, έχουμε ότι

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega, \nu \in \mathbb{N}^*$.

Συνεπώς:

$\alpha_{20} - \alpha_{10} = (\alpha_1 + 19\omega) - (\alpha_1 + 9\omega) = \alpha_1 + 19\omega - \alpha_1 - 9\omega = 10\omega$.

β) Αφού $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$, από το (α) ερώτημα έχουμε: $10\omega = 30 \Leftrightarrow \omega = 3$.

Επιπλέον $\alpha_1 = 1$, οπότε $\alpha_\nu = 1 + (\nu - 1)\cdot 3 = 3\nu - 2, \nu \in \mathbb{N}^*$.

γ) Αναζητούμε τον μικρότερο $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε $\alpha_\nu > 30$.

Συνεπώς:

$$3\nu - 2 > 30 \Leftrightarrow 3\nu > 32 \Leftrightarrow \nu > \frac{32}{3} \Leftrightarrow \nu > 10 + \frac{2}{3},$$

άρα ο $11^{ος}$ όρος ξεπερνά το 30.

δ) Αναζητούμε τον μεγαλύτερο $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε $\alpha_\nu < 60$.

Συνεπώς:

$$3\nu - 2 < 60 \Leftrightarrow 3\nu < 62 \Leftrightarrow \nu < \frac{62}{3} \Leftrightarrow \nu < 20 + \frac{2}{3},$$

άρα οι 20 πρώτοι όροι είναι μικρότεροι του 60.

Σελ. 209 – Άσκηση GI_ALG_4_4679

α) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x^2 - x + \frac{\alpha}{4} \geq 0$.

Για να ορίζεται η συνάρτηση f στο ℝ, πρέπει η ανίσωση $x^2 - x + \frac{\alpha}{4} \geq 0$ να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή θα πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι μη θετική.

Συνεπώς:

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{\alpha}{4} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$.

β) i) Αν $\alpha \geq 1$, η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$, οπότε

$f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{0^2 - 0 + \frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = 1$, που είναι δεκτή.

Για $\alpha = 1$, έχουμε:

$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

ii) $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ή $x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 0$.

Σελ. 210 – Άσκηση GI_ALG_4_4680

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0,$$

οπότε η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ έχει δύο ίσες ρίζες, όταν

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$,

έχουμε ότι το άθροισμα των ριζών είναι $S = x_1 + x_2 = -\frac{-1}{1} = 1$,

ενώ το γινόμενο των ριζών είναι $P = x_1 x_2 = \frac{\lambda - \lambda^2}{1} = \lambda - \lambda^2$.

Επίσης $|x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 < 4 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 < 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S^2 - 2P - 2P < 4 \Leftrightarrow 1^2 - 4(\lambda - \lambda^2) - 4 < 0 \Leftrightarrow 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda - 3 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}$,

αφού το τριώνυμο $4\lambda^2 - 4\lambda - 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 64$ και

ρίζες $\lambda = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 8}{8} = \begin{cases} \frac{4+8}{8} = \frac{3}{2} \\ \frac{4-8}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$, ενώ ισχύει

λ	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$4\lambda^2 - 4\lambda - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

Συνεπώς:

$0 < d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow 0 < |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow 0 < |x_1 - x_2|$ και $|x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 \neq x_2$ και $|x_1 - x_2|^2 < 4 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{1}{2}$ ή $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}$.

Σελ. 211 – Άσκηση GI_ALG_4_4681

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0,$$

οπότε η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ έχει δύο ίσες ρίζες, όταν

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$,

έχουμε ότι το άθροισμα των ριζών είναι $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{-1}{1} = 1$,

ενώ το γινόμενο των ριζών είναι $P = x_1 x_2 = \dfrac{\lambda - \lambda^2}{1} = \lambda - \lambda^2$.

Τότε για $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$ έχουμε:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| < \frac{1}{|x_1 - x_2|} \Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 < 1 \Leftrightarrow S^2 - 2P - 2P < 1 \Leftrightarrow 1^2 - 4(\lambda - \lambda^2) - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 1,$$

αφού το τριώνυμο $4\lambda^2 - 4\lambda$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0 = 16$ και ρίζες

$$\lambda = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 4}{8} = \begin{cases} \dfrac{4+4}{8} = 1 \\ \dfrac{4-4}{8} = 0 \end{cases}$$, ενώ ισχύει

λ	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$4\lambda^2 - 4\lambda$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Σελ. 212 – Άσκηση GI_ALG_4_4682

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0,$$

οπότε η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ έχει δύο ίσες ρίζες, όταν

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

γ) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0$.

Για να ορίζεται η συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, πρέπει η ανίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0$ να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή θα πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι μη θετική.

Συνεπώς:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Σελ. 213 – Άσκηση GI_ALG_4_4815

α) Αφού η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $A_g = \mathbb{R} - \{-2,1\}$ και είναι ρητή, θα πρέπει το –2 και το 1 να είναι ρίζες του παρονομαστή, δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} (-2)^2 + \kappa(-2) + \lambda = 0 \\ 1^2 + \kappa \cdot 1 + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2\kappa + \lambda = 0 \\ \lambda = -1 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2\kappa - 1 - \kappa = 0 \\ \lambda = -1 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\kappa = -3 \\ \lambda = -1 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = -1 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}.$$

β) i) Για κ = 1, λ = –2 και για $x \in A_g = \mathbb{R} - \{-2,1\}$, έχουμε ότι:

$$g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$$

ii) Έχουμε ότι

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g(x) = x^2 - x - 2$		+	0	−	0	+	

Αφού −1 < α < 2 ⇔ 2 < α + 3 < 5, έχουμε ότι g(α) < 0 και g(α + 3) > 0, οπότε g(α + 3) > g(α).

Σελ. 214 – Άσκηση GI_ALG_4_4819

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0,$$

οπότε η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ έχει δύο ίσες ρίζες, όταν

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

γ) i) Ισχύουν:

$$x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < x_1 + x_2 < 2x_2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2x_1 < x_1 + x_2$ και $x_1 + x_2 < 2x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ και $x_1 < x_2$, που ισχύουν, άρα ισχύει και η αρχική.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$,

έχουμε ότι το άθροισμα των ριζών είναι $S = x_1 + x_2 = -\frac{-1}{1} = 1$,

ενώ το γινόμενο των ριζών είναι $P = x_1 x_2 = \frac{\lambda - \lambda^2}{1} = \lambda - \lambda^2$.

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(2\lambda - 1)^2}}{2} = \frac{1 \pm (2\lambda - 1)}{2} = \begin{cases} \dfrac{1 + 2\lambda - 1}{2} = \lambda \\ \dfrac{1 - 2\lambda + 1}{2} = 1 - \lambda \end{cases}.$$

Αφού $x_1 < x_2$ έχουμε ότι

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{(2\lambda - 1)^2}}{2} = \frac{1 + (2\lambda - 1)}{2} = \frac{1 + 2\lambda - 1}{2} = \lambda > 0$$

και $x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{(2\lambda - 1)^2}}{2} = \frac{1 - (2\lambda - 1)}{2} = \frac{1 - 2\lambda + 1}{2} = 1 - \lambda$.

- Το x_2 είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$,

  οπότε $f(x_2) = x_2^2 - x_2 + \lambda - \lambda^2 = 0$.

- $f(x_2 + 1) = (x_2 + 1)^2 - (x_2 + 1) + \lambda - \lambda^2 = x_2^2 + 2x_2 + 1 - x_2 - 1 + \lambda - \lambda^2$

  $= x_2^2 - x_2 + \lambda - \lambda^2 + 2x_2 = 2x_2 > 0$.

- $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \lambda - \lambda^2 = \frac{S^2}{4} - \frac{2S}{4} + \frac{4\lambda - 4\lambda^2}{4}$

  $= \frac{1^2}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4\lambda - 4\lambda^2}{4} = \frac{4\lambda - 4\lambda^2 - 1}{4} = -\frac{4\lambda^2 - 4\lambda + 1}{4} = -\frac{(2\lambda - 1)^2}{4} \leq 0$.

Συνεπώς: $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < f(x_2) < f(x_2 + 1)$.

Σελ. 215 – Άσκηση GI_ALG_4_4828

α) Αφού η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $A_g = \mathbb{R} - \{-2,1\}$ και είναι ρητή, θα πρέπει το –2 και το 1 να είναι ρίζες του παρονομαστή, δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} (-2)^2 + \kappa(-2) + \lambda = 0 \\ 1^2 + \kappa \cdot 1 + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2\kappa + \lambda = 0 \\ \lambda = -1 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2\kappa - 1 - \kappa = 0 \\ \lambda = -1 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\kappa = -3 \\ \lambda = -1 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = -1 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}.$$

β) i) Για κ = 1, λ = –2 και για $x \in A_g = \mathbb{R} - \{-2,1\}$, έχουμε ότι:

$$g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$$

ii) Έχουμε ότι

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g(x) = x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Αφού –1 < α < 2 και –1 < β < 2, έχουμε ότι g(α) < 0 και g(β) < 0, οπότε g(α)g(β) > 0.

Σελ. 216 – Άσκηση GI_ALG_4_4833

Η αρχική σχέση γίνεται:

$\lambda = (2x+5)^2 - 8x = 4x^2 + 20x + 25 - 8x = 4x^2 + 12x + 25$.

α) Για $x = -5$ έχουμε:

$\lambda = 4(-5)^2 + 12(-5) + 25 = 100 - 60 + 25 = 65$.

β) Για $\lambda = 20$, έχουμε:

$20 = 4x^2 + 12x + 25 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$ ή $x = -\dfrac{1}{2}$,

αφού το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 12^2 - 4\cdot 4\cdot 5 = 144 - 80 = 64$ και ρίζες

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2\cdot 4} = \frac{-12 \pm 8}{8} = \begin{cases} \dfrac{-12+8}{8} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-12-8}{8} = -\dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

γ) $\lambda = 4x^2 + 12x + 25 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 25 - \lambda = 0$ **(I)**.

i) Έστω ότι $\lambda = 5$, οπότε η εξίσωση (Ι) γίνεται: $4x^2 + 12x + 20 = 0$, που είναι αδύνατη, αφού έχει αρνητική διακρίνουσα

$\Delta = 12^2 - 4\cdot 4\cdot 20 = 144 - 320 = -176 < 0$.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\lambda \neq 5$.

ii) Η εξίσωση (Ι) έχει πάντα λύση (αφού πάντα υπάρχει εισαγόμενος αριθμός x), οπότε $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 12^2 - 4\cdot 4\cdot (25-\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow 144 - 400 + 16\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16\lambda \geq 256 \Leftrightarrow \lambda \geq 16$.

Σελ. 217 – Άσκηση GI_ALG_4_4834

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = [-(\lambda^2+1)]^2 - 4\lambda\cdot\lambda = (\lambda^2-1)^2 \geq 0$,
οπότε έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες, όταν
$\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$.

γ) Αφού για $\lambda \neq 0$, ισχύει $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} \lambda < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0 \\ (\lambda^2-1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0 \\ \lambda^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0 \\ \lambda = \pm 1 \end{cases}, \text{ άρα } \lambda = -1.$$

Σελ. 218 – Άσκηση GI_ALG_4_4835

Αφού η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, έχουμε ότι

$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-\beta)^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0$ **(Ι)**.

Αν x_1, x_2 οι δύο άνισες πραγματικές ρίζες, έχουμε ότι

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{-\beta}{1} = \beta$ και $P = x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{1} = \gamma$.

α) Τότε:

$|x_1 + x_2| = 4 \Leftrightarrow |S| = 4 \Leftrightarrow |\beta| = 4 \Leftrightarrow \beta = 4$ ή $\beta = -4$.

β) Από την (Ι) για $\beta = 4$ ή $\beta = -4$, έχουμε ότι:

$4^2 - 4\cdot\gamma > 0 \Leftrightarrow 16 - 4\cdot\gamma > 0 \Leftrightarrow 4\gamma < 16 \Leftrightarrow \gamma < 4$.

γ) Έχουμε ότι: $x^2 - \beta|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - \beta|x| + 3 = 0$ **(ΙΙ)**.

Για $\beta = 4$, η εξίσωση (ΙΙ) είναι:

$|x|^2 - 4|x| + 3 = 0 \overset{|x|=\omega\geq 0}{\Leftrightarrow} \omega^2 - 4\omega + 3 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1$ ή $\omega = 3 \Leftrightarrow |x| = 1$ ή $|x| = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$ ή $x = \pm 3$,

αφού το τριώνυμο $\omega^2 - 4\omega + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 3 = 16 - 12 = 4$

και ρίζες $\omega = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$.

Για $\beta = -4$, η εξίσωση (ΙΙ) είναι:

$|x|^2 + 4|x| + 3 = 0 \overset{|x|=\omega\geq 0}{\Leftrightarrow} \omega^2 + 4\omega + 3 = 0 \Leftrightarrow \omega = -1$ ή $\omega = -3$ (απορρίπτονται),

άρα η εξίσωση είναι αδύνατη,

αφού το τριώνυμο $\omega^2 + 4\omega + 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 4^2 - 4\cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και

ρίζες $\omega = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-4+2}{2} = -1 \\ \dfrac{-4-2}{2} = -3 \end{cases}$.

Επομένως για $\beta = -4$, η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Σελ. 219 – Άσκηση GI_ALG_4_4836

α) Το τριώνυμο $x^2-\lambda x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-\lambda)^2-4\cdot1\cdot1=\lambda^2-4$.

Η εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, όταν

$\Delta>0 \Leftrightarrow \lambda^2-4>0 \Leftrightarrow \lambda^2>4 \Leftrightarrow |\lambda|>2 \Leftrightarrow \lambda<-2$ ή $\lambda>2$.

β) Ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2-\lambda x+1=0$, οπότε $\rho^2-\lambda\rho+1=0$ **(Ι)**.

Έχουμε ότι $\rho\neq 0$, αφού αν $\rho=0$ από την (Ι) θα ίσχυε $1=0$!!!

Τότε:

(Ι) $\Leftrightarrow \dfrac{\rho^2}{\rho^2}-\dfrac{\lambda\rho}{\rho^2}+\dfrac{1}{\rho^2}=0 \Leftrightarrow 1-\lambda\dfrac{1}{\rho}+\left(\dfrac{1}{\rho}\right)^2=0$, δηλαδή και το $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2-\lambda x+1=0$.

γ) i) Αν οι x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-\lambda x+1=0$,

έχουμε ότι το άθροισμα των ριζών είναι $S=x_1+x_2=-\dfrac{-\lambda}{1}=\lambda$,

ενώ το γινόμενο των ριζών είναι $P=x_1x_2=\dfrac{1}{1}=1$.

Αφού $P>0$, οι ρίζες x_1,x_2 είναι ομόσημες, ενώ επιπλέον $\lambda>2$, οπότε $S>0$, κάτι που σημαίνει ότι οι ρίζες x_1,x_2 είναι θετικές.

ii) Αφού $\lambda>2$, έχουμε ότι $\Delta>0$, οπότε η εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, όπου στο (β) ερώτημα αποδείξαμε ότι αν έχει ρίζα το $x_1=\rho>0$ θα έχει και ρίζα το $x_2=\dfrac{1}{\rho}>0$.

Επίσης:

$x_1+4x_2\geq 4 \Leftrightarrow \rho+\dfrac{4}{\rho}\geq 4 \Leftrightarrow \rho^2+4\geq 4\rho \Leftrightarrow \rho^2-4\rho+4\geq 0 \Leftrightarrow (\rho-2)^2\geq 0$, η οποία ισχύει, άρα και η αρχική.

Σελ. 220 – Άσκηση GI_ALG_4_4853

Αφού το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, έχουμε ότι $\Delta>0 \Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma>0$ **(I)**.

Αν x_1, x_2 οι δύο άνισες πραγματικές ρίζες, έχουμε ότι

$S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ **(II)** και $P=x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ **(III)**.

α) Αφού οι ρίζες είναι οι αριθμοί 1 και 2 έχουμε από τις (II), (III) ότι:

$$3=-\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta=-3\alpha \text{ και } 2=\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \gamma=2\alpha.$$

β) i) Αν $\alpha>0$ και αφού οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί 1 και 2 έχουμε ότι:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Συνεπώς $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0 \Leftrightarrow x<1$ ή $x>2$, περίπτωση που απορρίπτεται.

Αν $\alpha<0$ και αφού οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί 1 και 2 έχουμε ότι:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Συνεπώς $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0 \Leftrightarrow 1<x<2$, περίπτωση που είναι δεκτή.

ii) Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι:

$\gamma x^2+\beta x+\alpha=2\alpha x^2-3\alpha x+\alpha=2\alpha x^2-3\alpha x+\alpha$, με $\alpha<0$.

Το τριώνυμο $2\alpha x^2-3\alpha x+\alpha$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-3\alpha)^2-4\cdot 2\alpha\cdot\alpha=\alpha^2$ και

ρίζες $x=\dfrac{-(-3\alpha)\pm\sqrt{\alpha^2}}{2\cdot 2\alpha}=\dfrac{3\alpha\pm\alpha}{4\alpha}=\begin{cases}\dfrac{3\alpha+\alpha}{4\alpha}=1\\[2mm] \dfrac{3\alpha-\alpha}{4\alpha}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$, οπότε

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2\alpha x^2-3\alpha x+\alpha$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Συνεπώς:

$$\gamma x^2+\beta x+\alpha<0 \Leftrightarrow 2\alpha x^2-3\alpha x+\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha<\frac{1}{2} \text{ ή } \alpha>1.$$

Σελ. 221 – Άσκηση GI_ALG_4_4857

α) Το τριώνυμο $\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=[-(\alpha^2+\beta^2)]^2-4\alpha\beta\alpha\beta=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-4\alpha^2\beta^2=\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4=(\alpha^2-\beta^2)^2.$$

β) Η εξίσωση $\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, όταν

$\Delta>0 \Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)^2>0 \Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2\neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2\neq\beta^2 \Leftrightarrow \alpha\neq\pm\beta$.

Οι ρίζες της είναι:

$$x=\frac{-[-(\alpha^2+\beta^2)]\pm\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2}}{2\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2\pm(\alpha^2-\beta^2)}{2\alpha\beta}=\begin{cases}\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}\\[2ex]\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{\beta}{\alpha}\end{cases}.$$

γ) Έχουμε ότι α, β > 0, οπότε:

$$(1+x_1)(1+x_2)\geq 4 \Leftrightarrow 1+x_1+x_2+x_1x_2\geq 4 \Leftrightarrow 1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{\alpha}\geq 4 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha\beta+\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-4\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$, η οποία ισχύει, άρα και η αρχική.

Σελ. 222 – Άσκηση GI_ALG_4_4858

α) Από τον δοσμένο πίνακα τιμών παρατηρούμε ότι υπάρχει μια σταθερή ετήσια αύξηση του πληθυσμού των ελαφιών κατά 60 ελάφια, οπότε ο αριθμός των ελαφιών στο τέλος του (1999 + ν) έτους αποτελεί όρους αριθμητικής προόδου $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}^*$ με διαφορά $\omega = 60$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = 1300$.

Συνεπώς: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 1300 + (\nu - 1)\cdot 60 = 60\nu + 1240, \nu \in \mathbb{N}^*$.

β) i) Στο τέλος του 2012 είμαστε 13 έτη μετά το 1999, οπότε για ν = 13, έχουμε:

$\alpha_{13} = 60\cdot 13 + 1240 = 2020$.

Συνεπώς στο τέλος του 2012 θα υπάρχουν 2020 ελάφια.

ii) Αναζητούμε $\nu \in \mathbb{N}^*$, ώστε:

$\alpha_\nu = 1300 + 60\%\cdot 1300 \Leftrightarrow 60\nu + 1240 = 780 + 1300 \Leftrightarrow 60\nu = 840 \Leftrightarrow \nu = 14$,

δηλαδή στο τέλος του 2013 θα υπάρχει αύξηση του πληθυσμού των ελαφιών κατά 60% σε σχέση με τον πληθυσμό των ελαφιών το 2000.

iii) Αναζητούμε το μεγαλύτερο $\nu \in \mathbb{N}^*$, ώστε:

$\alpha_\nu \le 2600 \Leftrightarrow 60\nu + 1240 \le 2600 \Leftrightarrow 60\nu \le 1360 \Leftrightarrow \nu \le \frac{1360}{60} \Leftrightarrow \nu \le 22 + \frac{2}{3}$,

δηλαδή ν = 22, άρα στο τέλος του 2021 ο πληθυσμός των ελαφιών θα είναι μικρότερος των 2600.

Σελ. 223 – Άσκηση GI_ALG_4_4859

α) Το τριώνυμο $3x^2+\kappa x-4$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\kappa^2-4\cdot 3\cdot(-4)=\kappa^2+48>0$,

οπότε το τριώνυμο $3x^2+\kappa x-4$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $3x^2+\kappa x-4$, έχουμε ότι:

$$S=x_1+x_2=-\frac{\kappa}{3} \text{ και } P=x_1x_2=-\frac{4}{3}.$$

Αφού $P=x_1x_2=-\frac{4}{3}<0$, οι ρίζες x_1, x_2 είναι ετερόσημες.

γ) Έχουμε ότι:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$3x^2+\kappa x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Αφού οι ρίζες x_1, x_2 είναι ετερόσημες και δεδομένου ότι $\alpha<x_1<x_2<\beta$,

βρίσκουμε $\alpha<x_1<0<x_2<\beta$, άρα $\alpha\beta<0$.

Επίσης $\alpha<x_1$ και $x_2<\beta$, οπότε από τον πίνακα του προσήμου θα έχουμε ότι:

$f(\alpha)>0$ και $f(\beta)>0$.

Συνεπώς $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)<0$.