

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2010

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

A2. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ,

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) ,

$$\text{όπου } A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

δ) $(\sin x)' = \eta \mu x, \quad x \in \mathbb{R}$.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$, όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$.

B1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$$

Μονάδες 6

B3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **B3**, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμψής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμψής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi'\psi$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 x f(x) dx$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x$$
$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία, θεώρημα, σελίδα 304 σχολικού βιβλίου.
A2. Θεωρία, ορισμός, σελίδα 279 σχολικού βιβλίου.
A3. Θεωρία, ορισμός, σελίδα 273 σχολικού βιβλίου.
A4.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι: $z + \frac{2}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$.

Άρα $z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$, $z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$.

B2. Είναι: $z_1^{2010} + z_2^{2010} = (1-i)^{2010} + (1+i)^{2010} = [(1-i)^2]^{1005} + [(1+i)^2]^{1005} =$
 $= (1-2i-1)^{1005} + (1+2i-1)^{1005} = (-2i)^{1005} + (2i)^{1005} = (-2)^{1005} \cdot i^{1005} + 2^{1005} \cdot i^{1005} =$
 $= (-2)^{1005} \cdot (i^2)^{502} \cdot i + 2^{1005} \cdot (i^2)^{502} \cdot i = (-2^{1005}) \cdot i + (2^{1005}) \cdot i = -2^{1005} \cdot i + 2^{1005} \cdot i = 0$

2η λύση:

Είναι:

$$(1-i)^{2010} + (1+i)^{2010} = (1-i)^{2010} + [i(1-i)]^{2010} =$$
$$= (1-i)^{2010} + i^{2010} \cdot (1-i)^{2010} = (1-i)^{2010} \cdot (1+i^{2010}) = (1-i)^{2010} \cdot (1-1) = 0$$

B3. Είναι

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2| = |1-i-1-i| = |-2i| = 2$$

Έστω $w = x + \psi i$, τότε

$$|x + \psi i - 4 + 3i| = 2 \Leftrightarrow |(x-4) + (\psi+3)i| = 2 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (\psi+3)^2 = 4$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(4, -3)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

B4. Το $|w|$ είναι η απόσταση της εικόνας $M(w)$ από την αρχή $O(0, 0)$, δηλαδή το μήκος (OM) . Από τη Γεωμετρία όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B τότε

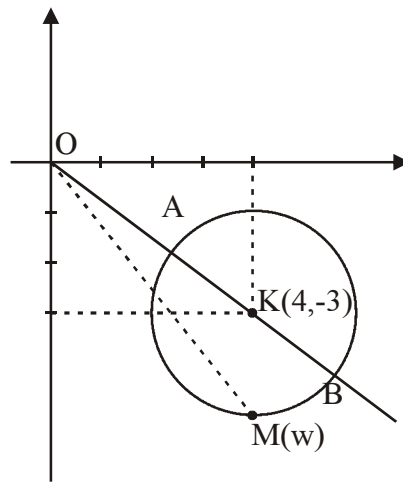
$$(OA) \leq (OM) \leq (OB) \quad (1)$$

που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι το μήκος (OB) και η ελάχιστη το μήκος (OA) .

Όμως

- $(OA) = (OK) - \rho = 5 - 2 = 3 \quad (2) \quad \text{και}$

- $(OB) = (OK) + \rho = 5 + 2 = 7 \quad (3)$



Επομένως, λόγω των (1), (2) και (3) έχουμε $3 \leq |w| \leq 7$.

2η λύση:

Γράφουμε :

$$|w| = |w + (-4 + 3i) - (-4 + 3i)|$$

Οπότε σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\left| |w + (-4 + 3i)| - |-4 + 3i| \right| \leq |w + (-4 + 3i) - (-4 + 3i)| \leq |w + (-4 + 3i)| + |-4 + 3i| \quad \text{ή}$$

$$\left| |z_1 - z_2| - |-4 + 3i| \right| \leq |w| \leq |z_1 - z_2| + |-4 + 3i| \quad \text{ή} \quad |2 - 5| \leq |w| \leq 2 + 5.$$

Άρα $3 \leq |w| \leq 7$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathfrak{R} , ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1}.$$

Επειδή $x^2 + x + 1 > 0$ καθώς και $x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$, είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathfrak{R} .

Γ2. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln[(3x - 2)^2 + 1] - \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 2(3x - 2) = \ln[(3x - 2)^2 + 1] - \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln(x^4 + 1) = \ln[(3x - 2)^2 + 1] + 2(3x - 2) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln(x^4 + 1) = 2(3x - 2) + \ln[(3x - 2)^2 + 1] \Leftrightarrow f(x^2) = f(3x - 2) \quad (1)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι και 1-1.

Επομένως από την (1) προκύπτει

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0. \text{ Άρα } x = 1 \text{ ή } x = 2.$$

Γ3. Είναι $f''(x) = \left(2 + \frac{2x}{x^2 + 1}\right)' = 2\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = 2\frac{x'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$

$$= 2\frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$, ενώ είναι $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$ και

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Έτσι η C_f έχει σημεία καμπής στα σημεία με τετμημένες $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

- Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_1 = -1$ έχει εξίσωση (ϵ_1):

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y - (-2 + \ln 2) = 1(x + 1) \Leftrightarrow y = x + \ln 2 - 1$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ προκύπτει } y = \ln 2 - 1$$

- Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_2 = 1$ έχει εξίσωση (ε_2):

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - (2 + \ln 2) = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x - 1 + \ln 2$$

Για $x = 0$ προκύπτει $y = \ln 2 - 1$.

Οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(0, \ln 2 - 1)$ του άξονα $y'y$.

$$\begin{aligned} \Gamma 4. \quad \int_{-1}^1 x f(x) dx &= \int_{-1}^1 (2x^2 + x \ln(x^2 + 1)) dx = 2 \int_{-1}^1 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 + 1)' \ln(x^2 + 1) dx = \\ &= 2 \int_{-1}^1 x^2 dx + \frac{1}{2} [(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 + 1) [\ln(x^2 + 1)]' dx = \\ &= 2 \int_{-1}^1 x^2 dx + \frac{1}{2} [(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 + 1) \frac{2x}{(x^2 + 1)} dx = \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} [x^2]_{-1}^1 = 2 \frac{2}{3} - \frac{1}{2} (1 - 1) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Η συνάρτηση $\varphi(t) = \frac{t}{f(t) - t}$ είναι

α) ορισμένη σε όλο το \mathfrak{R} αφού $f(t) \neq t$ για κάθε $t \in \mathfrak{R}$ και

β) συνεχής σε όλο το \mathfrak{R} , ως πηλίκο συνεχών.

Έτσι η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt + x + 3$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathfrak{R} , με

$$f'(x) = \varphi(x) + 1 = \frac{x}{f(x) - x} + 1 = \frac{x + f(x) - x}{f(x) - x} = \frac{f(x)}{f(x) - x}, \quad x \in \mathfrak{R}.$$

- Δ2.** Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathfrak{R} , ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$g'(x) = \left[(f(x))^2 - 2x \cdot f(x) \right]' = 2f(x) \cdot f'(x) - 2f(x) - 2x \cdot f'(x) =$$

$$= 2f'(x)(f(x) - x) - 2f(x) \stackrel{(\Delta 1)}{=} 2 \frac{f(x)}{f(x) - x} (f(x) - x) - 2f(x) = 0, \quad x \in \mathfrak{R}.$$

Άρα η g είναι συνεχής στο \mathfrak{R} .

- Δ3.** Είναι: $f(0) = 0 + 3 + \int_0^0 \frac{t}{f(t) - t} dt = 3$.

Λόγω του **Δ2** είναι $g(x) = c$, $c \in \mathfrak{R}$, για κάθε $x \in \mathfrak{R}$, άρα $(f(x))^2 - 2x \cdot f(x) = c$, για κάθε $x \in \mathfrak{R}$.

Για $x = 0$ προκύπτει $c = (f(0))^2 - 2 \cdot 0 \cdot f(0) = 9$.

Έτσι $(f(x))^2 - 2x \cdot f(x) = 9 \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2x \cdot f(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow$

$$(f(x) - x)^2 = x^2 + 9. \quad (1)$$

Αν θέσουμε $h(x) = f(x) - x$, έχουμε ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής στο \mathfrak{R} και $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$, αφού $f(x) \neq x$, $x \in \mathfrak{R}$.

Άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathfrak{R} , δηλαδή είναι ή $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$ ή $h(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$.

Όμως $h(0) = f(0) - 0 = 3 > 0$ άρα

$$h(x) > 0, \quad x \in \mathfrak{R} \text{ και } f(x) > x, \quad x \in \mathfrak{R}. \quad (2)$$

Από την (1) προκύπτει ότι

$$|f(x) - x| = \sqrt{x^2 + 9} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, \quad x \in \mathfrak{R}.$$

Δ4. Έστω $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$, $x \in \mathfrak{R}$.

Είναι $F(x) = \int_c^{x+1} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt$, $x \in \mathfrak{R}$, $c \in \mathfrak{R}$.

$$\text{και } F'(x) = f(x+1) - f(x), \quad x \in \mathfrak{R}. \quad (1)$$

$$\text{Όμως } f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{\sqrt{x^2 + 9} + x}{\sqrt{x^2 + 9}} > \frac{\sqrt{x^2} + x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{|x| + x}{\sqrt{x^2 + 9}} \geq 0, \quad x \in \mathfrak{R}.$$

Δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathfrak{R} .

$$\text{Προκύπτει έτσι: } x < x+1 \Rightarrow f(x) < f(x+1) \Rightarrow f(x+1) - f(x) > 0, \quad x \in \mathfrak{R}. \quad (2)$$

Λόγω των (1), (2) η F είναι γνησίως αύξουσα στο \mathfrak{R} .

$$\text{Επομένως: } x < x+1 \Leftrightarrow F(x) < F(x+1) \Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt.$$

2η λύση:

Η $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι μια αρχική της f στο \mathfrak{R} και η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται

$$F(x+1) - F(x) < F(x+2) - F(x+1) \Leftrightarrow \frac{F(x+1) - F(x)}{(x+1) - x} < \frac{F(x+2) - F(x+1)}{(x+2) - (x+1)}.$$

Από Θ.Μ.Τ. για την F στα διαστήματα $[x, x + 1]$ και $[x + 1, x + 2]$ προκύπτει ότι υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (x, x + 1)$ και $\xi_2 \in (x + 1, x + 2)$ ώστε

$$\frac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x} = F'(\xi_1) = f(\xi_1) \quad \text{και} \quad \frac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)} = F'(\xi_2) = f(\xi_2).$$

Έτσι αρκεί να δειχθεί $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ με $\xi_1 < \xi_2$, ή ισοδύναμα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι:

$$f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2 + 9}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{\sqrt{x^2 + 9} + x}{\sqrt{x^2 + 9}} > \frac{\sqrt{x^2} + x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{|x| + x}{\sqrt{x^2 + 9}} \geq 0, \quad \text{για κάθε}$$

$x \in \mathfrak{R}$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$ και η f γνησίως αύξουσα στο \mathfrak{R} .