

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2009
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 10

B. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Μονάδες 2

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Μονάδες 2

γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

Μονάδες 2

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι:

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i, \lambda \in \mathbb{R}$$

A. α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

- β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

- Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$$

όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1), \quad x > -1,$$

όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

- Α. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

Μονάδες 8

- Β. Για $\alpha = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Μονάδες 6

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(\beta) - 1}{\beta - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{\gamma - 2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$ για την οποία ισχύει:

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$H(x) = \int_0^x t f(t)dt, \quad x \in [0, 2],$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0, 2] \\ 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει:

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2$$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$.

Μονάδες 7

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\zeta \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$a \int_0^{\zeta} t f(t) dt = \zeta^2 \int_0^a f(t) dt$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία - Θεώρημα σελίδα 251 σχολ. βιβλίου.

B. Θεωρία - Ορισμός σελίδα 213 σχολ. βιβλίου.

Γ.

α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

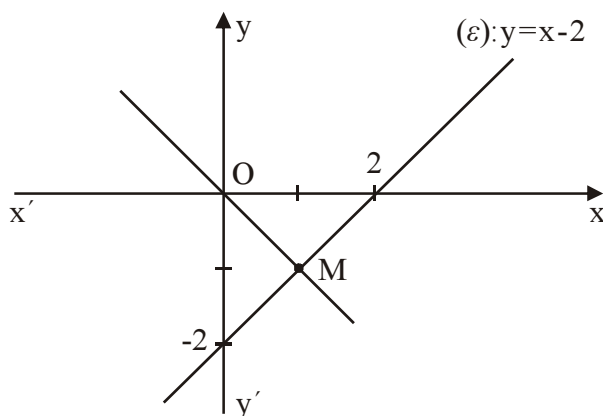
A.

α. Έστω $z = x + yi$ και $M(x, y)$ η εικόνα του. Τότε $x + yi = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$.

Άρα $x = 2\lambda + 1$ και $y = 2\lambda - 1$. Έτσι όμως $y - x = -2 \Leftrightarrow y = x - 2$.

Δηλαδή οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται στην ευθεία $(\varepsilon): y = x - 2$.

β. Ο μιγαδικός z_0 με το μικρότερο μέτρο έχει εικόνα το σημείο M για το οποίο είναι $OM \perp (\varepsilon)$.



Αφού $OM \perp (\varepsilon) \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot 1 = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} = -1$.

Άρα η εξίσωση της OM είναι: $y = -x$.

Οι συντεταγμένες του M (σημείου τομής των OM, ε) προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων $y = -x, y = x - 2$.

Επομένως $M : \begin{cases} y = -x \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$. Άρα $M(1, -1)$ και $z_0 = 1 - i$.

B. Έστω $w = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$ γράφεται

$$x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 - yi = 1 - i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 = 1$$

$$\text{και } y = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \text{ και } y = 1 \Leftrightarrow (x = -4 \text{ ή } x = 3) \text{ και } y = 1.$$

Άρα $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$.

ΘΕΜΑ 3ο

A. Ισχύει ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$. Δηλαδή $a^x - \ln(x + 1) \geq 1$ για κάθε $x > -1$.

Όμως $f(0) = 1$, οπότε $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x > -1$.

Επομένως η f παρουσιάζει στη θέση $x = 0$ (ολικό, άρα και τοπικό) ελάχιστο το $f(0) = 1$.

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x+1}$, οπότε $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$.

B.

α. Για $a = e$ είναι $f(x) = e^x - \ln(x + 1)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ με $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ και

$$f''(x) = \left(e^x - \frac{1}{x+1} \right)' = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, +\infty).$$

Άρα η f είναι κυρτή.

β. Αφού η f είναι κυρτή στο $(-1, \infty)$ προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, \infty)$, με προφανή ρίζα $x = 0$ που είναι και μοναδική αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι αν $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$, ενώ αν $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $\frac{(f(\beta) - 1)(x - 2) + (f(\gamma) - 1)(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (f(\beta) - 1)(x - 2) + (f(\gamma) - 1)(x - 1)$, με $x \in [1, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική άρα και στο $[1, 2]$.

- $g(1) = -(f(\beta) - 1) = 1 - f(\beta) = f(0) - f(\beta) < 0$, διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\beta \neq 0$,
- $g(2) = f(\gamma) - 1 = f(\gamma) - f(0) > 0$, επίσης διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\gamma \neq 0$.

*(Πιο αναλυτικά είναι $f(0) - f(\beta) < 0$ διότι:

Αν $\beta \in (-1, 0)$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό ισχύει:

$$-1 < \beta < 0 \Rightarrow f(\beta) > f(0) \Rightarrow f(0) - f(\beta) < 0$$

Αν $\beta \in (0, +\infty)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό ισχύει:

$$0 < \beta \Leftrightarrow f(0) > f(\beta).$$

Ομοίως προκύπτει $f(\gamma) - f(0) > 0$.

Άρα $g(1) \cdot g(2) < 0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow (f(\beta) - 1)(x_0 - 2) + (f(\gamma) - 1)(x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(f(\beta) - 1)(x_0 - 2) + (f(0) - 1)(x_0 - 1)}{(x_0 - 1)(x_0 - 2)} = 0.$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

*Παρατήρηση: Θέτοντας χάριν συντομίας $f(\beta) - 1 = \kappa > 0$ και $f(\gamma) - 1 = \lambda > 0$ θα μπορούσαν να δοθούν και οι παρακάτω λύσεις:

α) Η συνάρτηση $h(x) = \frac{\kappa}{x-1} + \frac{\lambda}{x-2}$ με πεδίο ορισμού το $(1, 2)$ έχει όρια $+\infty$ και $-\infty$

αντίστοιχα όταν $x \rightarrow 1^+$ και $x \rightarrow 2^-$ ενώ αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι είναι και γνησίως

φθίνουσα στο $(1, 2)$, διότι $h(x) = -\left(\frac{\kappa}{(x-1)^2} + \frac{\lambda}{(x-2)^2}\right) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$, άρα έχει

σύνολο τιμών το $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = (-\infty, +\infty)$ και άρα το μηδέν περιέχεται στο σύνολο

τιμών της δηλαδή η h έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

Επίσης εναλλακτικά από το ότι η h έχει όρια $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα όταν $x \rightarrow 1^+$ και $x \rightarrow 2^-$, προκύπτει ότι υπάρχουν αριθμοί γ, δ ώστε $1 < \gamma < \delta < 2$ με $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$ οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα (γ, δ) υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

β) Αλγεβρική λύση:

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omicron\nu\tau\alpha\varsigma \frac{\kappa}{x-1} + \frac{\lambda}{x-2} = 0, \quad x \in (1, 2) \quad \text{προκύπτει} \quad \frac{\kappa(x-2) + \lambda(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa(x-2) + \lambda(x-1) = 0 \Leftrightarrow (\kappa + \lambda)x = 2\kappa + \lambda \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa + \lambda}{\kappa + \lambda}.$$

Η τιμή αυτή είναι αποδεκτή ως ρίζα της εξίσωσης αφού

$$1 = \frac{\kappa + \lambda}{\kappa + \lambda} < \frac{2\kappa + \lambda}{\kappa + \lambda} < \frac{2\kappa + 2\lambda}{\kappa + \lambda} = 2 \quad (\text{και είναι μάλιστα μοναδική ρίζα}).$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Η f συνεχής στο $[0, 2]$ άρα και η $tf(t)$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

Επομένως η συνάρτηση $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$, άρα είναι και συνεχής.

Η συνάρτηση $\int_0^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

Άρα η G είναι συνεχής στο $(0, 2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Εξετάζουμε τη συνέχεια της συνάρτησης G στη θέση $x_0 = 0$.

$$\text{Είναι} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t) dt + 3 \right) = 0 - 0 + 3 = 3, \quad \text{διότι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x tf(t) dt}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x tf(t) dt\right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf(x)}{1} = 0 \cdot f(0) = 0.$$

(είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x tf(t) dt = \int_0^0 tf(t) dt = 0 \quad \text{διότι η συνάρτηση } tf(t) \text{ είναι συνεχής, άρα η } \int_0^x tf(t) dt$$

παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

$$\text{Επίσης} \quad G(0) = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1-t^2})(1 + \sqrt{1-t^2})}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} =$$

$$= 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + t^2}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0) = 3$.

Άρα η συνάρτηση G είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Επομένως η G είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

β. Στο διάστημα $(0, 2)$ είναι:

- η συνάρτηση H παραγωγίσιμη αφού η f είναι συνεχής, με $H'(x) = xf(x)$.
- η συνάρτηση x παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $(x)' = 1$.

Άρα και η συνάρτηση $\frac{H(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\left(\frac{H(x)}{x}\right)' = \frac{H'(x) \cdot x - H(x)(x)'}{x^2} = \frac{x \cdot f(x) \cdot x - \int_0^x t \cdot f(t) dt}{x^2} = f(x) - \frac{\int_0^x t \cdot f(t) dt}{x^2}.$$

Επίσης στο ίδιο διάστημα, αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση θα είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $\int_0^x f(t) dt$ με $\left(\int_0^x f(t) dt\right)' = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$G'(x) = f(x) - \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2.$$

γ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$, με $G(0) = 3$ (από το β ερώτημα).

$$\text{Βρίσκουμε την τιμή της } G \text{ στη θέση } x = 2: G(2) = \frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t) dt + 3 \quad (1).$$

Όμως

$$\int_0^2 (t-2)f(t) dt = 0 \Rightarrow \int_0^2 t f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt = 0 \Rightarrow \int_0^2 t f(t) dt = 2 \int_0^2 f(t) dt \Rightarrow H(2) = 2 \int_0^2 f(t) dt.$$

Έτσι λόγω της (1) είναι

$$G(2) = \frac{2 \int_0^2 f(t) dt}{2} - \int_0^2 f(t) dt + 3 = 3 = G(0).$$

Ισχύουν επομένως για τη συνάρτηση G οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 2]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $G'(\alpha) = 0$.

$$\text{Όμως από β ερώτημα } G'(\alpha) = -\frac{H(\alpha)}{\alpha^2}.$$

Άρα είναι $H(\alpha) = 0$.

δ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \alpha)$:

$$G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha - 0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t) dt + 3 - 3}{\alpha} \stackrel{H(\alpha)=0}{\Leftrightarrow}$$

$$-\frac{\int_0^\xi t f(t) dt}{\xi^2} = -\frac{\int_0^\alpha f(t) dt}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \int_0^\xi t f(t) dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t) dt.$$

***β' τρόπος:**

Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει ρίζα στο $(0, \alpha)$, με $\alpha \in (0, 2)$ για την εξίσωση:

$$\alpha \int_0^x t f(t) dt = x^2 \cdot \int_0^\alpha f(t) dt \Leftrightarrow \alpha H(x) = x^2 \int_0^\alpha f(t) dt \Leftrightarrow -\frac{H(x)}{x^2} = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t) dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G'(x) + \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \left(G(x) + \frac{x}{\alpha} \int_0^\alpha f(t) dt \right)' = 0 \quad (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $P(x) = G(x) + \frac{x}{\alpha} \int_0^\alpha f(t) dt$ (αρχική της $G'(x) + \frac{x}{\alpha} \int_0^\alpha f(t) dt$), για

την οποία έχουμε :

α) είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ ως άθροισμα της συνεχούς G (από το α' ερώτημα) και της

πολυωνυμικής $\left(\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t) dt \right) x$.

β) είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ ως άθροισμα της παραγωγίσιμης G (από το β' ερώτημα)

και της πολυωνυμικής, $\left(\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t) dt \right) x$ με $P'(x) = G'(x) + \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t) dt$.

γ) $P(0) = P(\alpha) = 3$ διότι

$P(0) = G(0) + 0 = 3$ και

$$P(\alpha) = G(\alpha) + \int_0^\alpha f(t) dt = \frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t) dt + 3 + \int_0^\alpha f(t) dt = \frac{H(\alpha)}{\alpha} + 3 = \frac{0}{\alpha} + 3 = 3.$$

Έτσι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle και άρα υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ ώστε

$$P'(\xi) = 0 \Leftrightarrow P'(\xi) = 0 \Leftrightarrow G'(\xi) + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(t) dt = 0, \text{ δηλαδή αποδείχθηκε ότι η εξίσωση (1)}$$

έχει ρίζα $\xi \in (0, \alpha)$.