

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

**Μονάδες 8**

**A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο, το  $f(x_0)$ ;

**Μονάδες 3**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ , τότε ισχύει  $(a^x)' = x a^{x-1}$

**β)** Αν ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε πάντοτε ισχύει  $f \circ g = g \circ f$

**γ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

δ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και ισχύει  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ ,

$$\text{τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

ε) Για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$  είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$$z_1 + z_2 = -2 \text{ και } z_1 \cdot z_2 = 5$$

**B1.** Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$

**Μονάδες 5**

**B2.** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  ισχύει η σχέση

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση  $(x+1)^2 + y^2 = 4$

**Μονάδες 8**

**B3.** Από τους μιγαδικούς αριθμούς  $w$  του ερωτήματος **B2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει

$$2 \cdot \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) = 0$$

**Μονάδες 6**

**B4.** Αν  $w_1, w_2$  είναι δύο από τους μιγαδικούς  $w$  του ερωτήματος **B2** με την ιδιότητα  $|w_1 - w_2| = 4$ , να αποδείξετε ότι  $|w_1 + w_2| = 2$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3, x > 0$

**Γ1.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(0,1]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[1, +\infty)$

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες του ερωτήματος **Γ3** με  $x_1 < x_2$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιος, ώστε  $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$   
και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο  $\mathbb{R}$  με  $f(0) = 1$  και  $f'(0) = 0$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \int_0^1 f(xt) dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = +\infty$

**Μονάδες 6**

Αν επιπλέον δίνεται ότι

$$f'(x) + 2x = 2x \cdot (f(x) + x^2), \quad x \in \mathbb{R}, \text{ τότε:}$$

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = e^{x^2} - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 8**

**Δ4.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_x^{x+2} f(t) dt, \quad x \geq 0$$

και να λύσετε στο  $\mathbb{R}$  την ανίσωση

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t) dt + \int_6^4 f(t) dt < 0$$

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 09.30 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**