Άλγεβρα Α΄ Λυκείου – πραγματικοί αριθμοί - κεφάλαιο 2ο

Ασκήσεις ανάπτυξης – συλλογή 4 – από 61.2 έως 72.2

61.2 Να αποδείξετε ότι :

α) Αν $\alpha \cdot \beta > 0$, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

β) Αν $\alpha \cdot \beta < 0$, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

γ) Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$

δ) Αν $\alpha < 0$, τότε $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$

62.2 Να αποδείξετε ότι :

α) $\alpha^2 \geq 0$

β) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 0$

γ) $\alpha^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

δ) $\alpha^2 + \beta^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$

ε) $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

63.2 Αν ισχύει $x^2 + y^2 + 4x - 2y \leq -5$, να αποδείξετε ότι x = - 2 και y = 1

64.2 Να αποδείξετε ότι :

α) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$

β) Αν α,β ≥ 0 τότε $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

γ) Αν α > 0, β > 0, γ > 0 τότε $\frac{\beta\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha\gamma}{\beta} + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \geq \alpha + \beta + \gamma$

δ) Αν α > 0, β > 0, γ > 0 τότε $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha} \leq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$

65.2 Να αποδείξετε ότι :

α) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

β) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

γ) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

δ) $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 \geq \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$

66.2 Αν α , β είναι θετικοί, να αποδείξετε ότι :

α) $(\alpha+\beta)^2 \le 2(\alpha^2+\beta^2)$

β) $\alpha^2+\beta^2 < (\alpha+\beta)^2$

γ) $1 \le \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} + \dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2} < 2$

67.2 Αν α , β , γ, θετικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ να αποδείξετε ότι :

α) $\alpha>\beta$ και $\alpha>\gamma$

β) $\alpha^3>\beta^3+\gamma^3$

68.2 Αν α, β είναι ομόσημοι, να αποδείξετε ότι :

α) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\ge 2$

β) Αν α, β, x, y είναι θετικοί τότε $\dfrac{\alpha^2 yx+\beta^2 xy+x^2\alpha\beta+y^2\alpha\beta}{\alpha\beta xy}\ge 4$

69.2 Αν α > 0 και β > 0 να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{2}\ge\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$

70.2 Αν α > 0 , β > 0 και α + β = 1 να αποδείξετε ότι :

α) $\alpha\beta\le\dfrac{1}{4}$

β) $\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right)\ge 9$

71.2 Αν α , β , γ , δ πραγματικοί αριθμοί ,

α) Να αποδείξετε ότι : $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)\ge(\alpha\gamma+\beta\delta)^2$

β) Αν 4x + y = 17 , να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης x^2+y^2

72.2 Αν α , β , γ μήκη πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι :

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3<\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)$