Άλγεβρα Α΄ Λυκείου – πραγματικοί αριθμοί -κεφάλαιο 2ο

Ασκήσεις ανάπτυξης – συλλογή 2 – από 26.2 έως 50.2

Ταυτότητες

26.2 Να αποδείξετε ότι : $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta$. Να γράψετε τον αριθμό 2012 σαν διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

27.2 Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2)$ και στη συνέχεια να απαντήσετε στο ερώτημα : ¨Αν το άθροισμα δύο αριθμών είναι σταθερό, πότε το άθροισμα των τετραγώνων τους παίρνει την ελάχιστη τιμή του¨

28.2 Να αποδείξετε ότι :

α) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$ (Euler)

β) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

γ) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma$

δ) Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε $(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3=3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

ε) $(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3=3(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

στ) Αν $\alpha+\beta+\gamma=4$, και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=10$, τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=28$

ζ) Αν $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$, αποδείξτε οτι $\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}=3$

29.2 Αν $\alpha+\beta+\gamma=x+y+z$, να γίνει γινόμενο η παράσταση $A=(\alpha-x)^3+(\beta-y)^3+(\gamma-z)^3$

30.2 Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\kappa=\alpha^2-\beta^2, \lambda=2\alpha\beta, \mu=\alpha^2+\beta^2$ είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.

31.2 Αν $\alpha+\beta=4$, και $\alpha\beta=3$ να υπολογίστε τις τιμές των παραστάσεων:

$\alpha^2+\beta^2,\ \alpha^3+\beta^3,\ \alpha^4+\beta^4,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{\beta},\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{\beta^2},\ \frac{1}{a^3}+\frac{1}{\beta^3},\ \frac{\beta}{a^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}$.

32.2 Αν $\alpha-\frac{1}{\alpha}=\kappa$ να εκφράσετε συναρτήσει του κ τις παραστάσεις :

$\alpha^2+\beta^2,\ \alpha^3-\beta^3$.

33.2 Αν $x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(x-\frac{1}{x})^2$.

34.2 Αν οι αριθμοί x , y είναι αντίστροφοι και $x^2+y^2=3$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων : $(x-y)^2,\ (x-y)^{1000},\ x^4+y^4$

35.2 Αν $\alpha\beta\gamma = \frac{1}{3},\ \alpha+\beta+\gamma = 2,\ \alpha-\beta = \beta-\gamma = \gamma-\alpha = 1$, να υπολογίσετε την παράσταση $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

36.2 Να αποδείξετε ότι : $(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.

37.2 Να αποδείξετε ότι : $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) = (\alpha y-\beta x)^2+(\alpha x+\beta y)^2$, (ταυτότητα του Langrange) , και να γράψετε το γινόμενο $25\cdot 26$ σαν άθροισμα τετραγώνων δύο ακεραίων.

38.2 Αν $\alpha+\beta+\gamma = 0$ και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$ να αποδείξετε ότι $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 = \frac{1}{2}$

39.2 Αν $\alpha^2+\beta^2 = a\beta$, να αποδείξετε ότι : $\alpha = \beta = 0$

40.2 Αν $(\alpha+\beta)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$

41.2 Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$

42.2 Αν $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$

43.2 Αν $(\alpha+\beta)(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}) = 4$, να αποδείξετε ότι : $\alpha = \beta$

44.2 Αν $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2 = 4(\alpha x+\beta y)$, αποδείξτε ότι $x = a$ και $\mathrm{y} = \beta$

45.2 Αν $x^2+y^2+2x+4y+5 = 0$, να αποδείξετε ότι $x = -1$ και $\mathrm{y} = -2$

46.2 Αν $\alpha+\beta+\gamma = 1,\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = 0,\ \alpha\beta\gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι : $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$.

47.2 Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = 0$.

48.2 Αν για τους θετικούς x,y,z ισχύει $(x+y)(y+z)(z+x) = 8xyz$, αποδείξτε ότι : x = y = z .

49.2 Αν $\alpha+\beta+\gamma = 0,\ \alpha\beta\gamma \neq 0,$ αποδείξτε ότι:

$$\frac{1}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}+\frac{1}{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2} = 0$$

50.2 Αν α, β, γ πλευρές ενός τριγώνου με περίμετρο 2τ να αποδείξετε ότι :

$$(\tau-\alpha)(\tau-\beta)+(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)+\tau^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$