



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να δείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 9

B. 1. Πότε η ευθεία $\psi = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

2. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ):

1. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l$

Μονάδες 2

2. Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Μονάδες 2

3. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε η f έχει υποχρεωτικά ολικά ακρότατα τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

Μονάδες 2

4. Για τις συναρτήσεις f και g που έχουν συνεχείς παραγώγους στο $[\alpha, \beta]$ ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx - \int_{\beta}^{\alpha} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

Μονάδες 2

5. Αν για κάθε στοιχείο ψ του συνόλου τιμών της $f(x)$, η $f(x) = \psi$ έχει λύση ως προς x τότε η f είναι 1-1.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{1}{z} = -1$, $z \in \mathbb{C}$ και z_1, z_2 οι ρίζες της. Να αποδείξετε ότι:

A. $z_1 \cdot z_2 = 1$ και $z_1^3 = 1$.

Μονάδες 4

B. $(z_1^{2009} + z_2^{2009}) \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ. $z_1^8 + \frac{1}{z_2^{10}} + 1 = 0$

Μονάδες 4

Δ. Αν $f(x)$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με

$$f(0) - 2 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} - \frac{3}{2}$$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$, ώστε $f(x_0) = 3x_0 - 2$.

Μονάδες 7

E. Αν Γ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w = 2z_1 + 2z_2$ και A, B οι εικόνες των z_1 και z_2 αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 6**ΘΕΜΑ 3^ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 + 2\ln x$.

A. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

Μονάδες 6

B. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f .

Μονάδες 6

Γ. Αν $g(x) = \frac{x \cdot \ln x}{x+2}$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε:

$$g(x) \geq g(x_0) \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 7

Δ. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 2$ ισχύει: $f(x-2) < 2f(x+1) - f(x+4)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x} \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{1}{e}$$

A. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{-1/x}$.

Μονάδες 8

B. 1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο σημείο με τετμημένη $x = 1$.

Μονάδες 2

2. Να δείξετε ότι $\int_1^2 f(x) dx > \frac{2}{e}$.

Μονάδες 7

Γ. Αν $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$, να βρείτε το εμβαδόν $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_g , τον x' και τις ευθείες $x=1$ και $x=t$ με $t > 1$.

Μονάδες 5

Δ. Να βρείτε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t)$.

Μονάδες 3