Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι:
Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 9

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{a}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $x > 0$.
Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$.

Μονάδες 6

Γ. Να απαντήσετε αν είναι **Σωστή** ή **Λάθος** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Μια συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ είναι << 1 – 1 >> αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in \mathrm{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$

2. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ και γνησίως αύξουσα, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 0$.

5. Αν $\int_a^\beta f(x)\,dx = 0$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο $[a, \beta]$, τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x} \cdot (\ln x - 2), x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.

Μονάδες 3

γ) Να μελετήσετε τα κοίλα της f και να βρείτε το σημείο της καμπής της.

Μονάδες 8

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=\dfrac{1}{e}$ και $x=e^{2}$.

Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται ο μιγαδικός $z=e^{x}+(x-1)\,i,\quad x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\operatorname{Re}\left(z\right)>\operatorname{Im}\left(z\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ..

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in\left(0,1\right)$ τέτοιος ώστε ο αριθμός $w=z^{2}+z+2i$ να είναι πραγματικός.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2}$ και $e^{x}\left[f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right]+\eta\mu x=-f'\left(x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{x}},\ \ x\in\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ..

Μονάδες 7

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f\left(x\right)dx$.

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι: $0\le\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}f\left(x\right)dx\le\dfrac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6