

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
/ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(9 μονάδες)

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$;

(3 μονάδες)

A3. Τι μας δίνουν τα μέτρα θέσης και τί τα μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας μιας κατανομής ενός συνόλου δεδομένων;

(3 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Η αθροιστική συχνότητα N_i μιας τιμής x_i εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες της τιμής x_i .
- β)** Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $f(x)$ δεν παρουσιάζει ακρότατα.
- γ)** Σε μια κανονική κατανομή το 0,3% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται εκτός του διαστήματος $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$.
- δ)** Αν η διάμεσος v παρατηρήσεων είναι ίση με μία από αυτές τότε είναι βέβαιο ότι το πλήθος n των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός.
- ε)** Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε οι εκφράσεις «Δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A και B» και «Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B» είναι ισοδύναμες.

(2X5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Εξετάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα συνταξιούχων ως προς το ποσό της μηνιαίας συνολικής σύνταξης που λαμβάνουν σε εκατοντάδες ευρώ. Για την κατανομή τους έχουν δημιουργηθεί 5 ισοπλατείς κλάσεις και γνωρίζουμε ότι:

- το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων v_i είναι 250.
- το μέσο της άνω βάσης του ορθογωνίου του ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$, που αντιστοιχεί στη 2^η κλάση είναι το σημείο $A(10, \alpha)$
- Το εύρος των παρατηρήσεων είναι 20.
- Η συχνότητα $f_1\%$ είναι τριπλάσια της $f_2\%$ και δεκαπλάσια της $f_4\%$, ενώ η $f_2\%$ είναι διπλάσια της $f_3\%$ και πενταπλάσια της $f_5\%$.

B1. Να δείξετε ότι $\alpha=20$ και να συμπληρωθεί ο πίνακας κατανομής όλων των συχνοτήτων.

(8 μονάδες)

B2. Να υπολογιστεί η μέση τιμή, καθώς και η διάμεσος των συντάξεων. Τί είδους ασυμμετρία έχει η κατανομή;

(6 μονάδες)

B3. Αν η κυβέρνηση αποφασίσει μείωση των συντάξεων που υπερβαίνουν τα 1300 ευρώ, βρείτε το ποσοστό των θιγόμενων συνταξιούχων καθώς και να εκτιμήσετε το πλήθος τους αν γνωρίζουμε ότι ο συνολικός αριθμός συνταξιούχων της χώρας είναι 2.850.000.

(5 μονάδες)

B4. Αν δοθεί επίδομα στους έχοντες συνολικό ετήσιο εισόδημα (από συντάξεις 12 μηνών) μικρότερο ή ίσο των 8.640 ευρώ τότε:

i. Επιλέγοντας τυχαία από το δείγμα έναν συνταξιούχο, να βρεθεί η πιθανότητα να λάβει το επίδομα.

(3 μονάδες)

ii. Αν το επίδομα δοθεί από τα χρήματα, που θα εξοικονομήσουν τα ταμεία αφαιρώντας 100 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της 3^{ης} κλάσης, 200 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της 4^{ης} και 400 ευρώ από καθέναν της 5^{ης} κλάσης και τα οποία μοιραστούν εξίσου στους δικαιούχους, τότε να βρεθεί το ποσό που αναμένεται να λάβει ανά μήνα ο κάθε δικαιούχος.

(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{3\sqrt{x}-6}{x-4}$ και $g(x) = 2P(B) \cdot \ln x + \sqrt{x} + \frac{1}{16}x^2$ και τα A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .

Γ1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$. (4 μονάδες)

Γ2. Αν η πιθανότητα $P(A)$ του ενδεχομένου A του δειγματικού χώρου Ω είναι ίση με το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $g(x)$ στο $x_0=4$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$. (8 μονάδες)

Γ3. Αν $P(A) = \frac{3}{4}$ και $P(B) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cap B) \in \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6} \right\}$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$. (5 μονάδες)

β) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A ή να μην πραγματοποιηθεί το B . (4 μονάδες)

γ) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B . (4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (6 μονάδες)

Δ2. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A, B δύο ενδεχόμενα για τα οποία ισχύει:

$$f(P(B)) = P(A), \text{ όπου } f(x) \text{ η προηγούμενη συνάρτηση.}$$

i. Να αποδείξετε ότι το A είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το B είναι αδύνατο ενδεχόμενο. (7 μονάδες)

- ii. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας απόλυτων συχνοτήτων v_i και τα ενδεχόμενα Γ, Δ του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , διαφορετικά των A και B με $\Gamma \subseteq \Delta$ και $\Gamma \neq \Delta$.

x_i	v_i
1	$2P(\Gamma)$
2	$4P(\Delta)$
3	$4P(\Gamma)+4P(\Delta)$
4	$P(A)$
Σύνολα	

- α) Να αποδείξετε ότι $v_1=1$ και $v_2=3$ και να συμπληρωθεί ο πίνακας.
(6 μονάδες)
- β) Να υπολογιστεί η διάμεσος των παρατηρήσεων.
(3 μονάδες)
- γ) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:
 $P(\Gamma \cap \Delta)$, $P(\Gamma \cup \Delta)$.
(3 μονάδες)