

## Η θεωρία στην ευθεία σε ερωτήσεις - απαντήσεις

Τι ονομάζουμε εξίσωση γραμμής

Μια εξίσωση με δύο αγνώστους λέγεται εξίσωση μιας γραμμής  $C$ , όταν οι συντεταγμένες των σημείων της  $C$ , και μόνο αυτές, την επαληθεύουν.

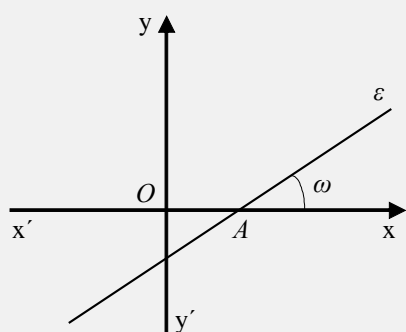
Ποιό είναι το βασικό αντικείμενο της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Με τις εξισώσεις των γραμμών μπορούμε με αλγεβρικές μεθόδους να μελετήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες των γραμμών αυτών ή να αντιμετωπίσουμε διάφορα άλλα συναφή προβλήματα.

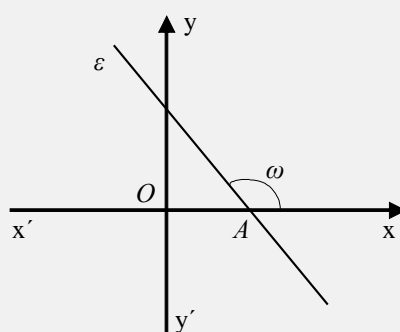
Τι λέμε γωνία ευθείας με τον άξονα  $x'x$

Τη γωνία  $\omega$  που διαγράφει ο άξονας  $x'x$  όταν στραφεί γύρω από το  $A$  κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ευθεία  $\varepsilon$  τη λέμε γωνία που σχηματίζει η  $\varepsilon$  με τον άξονα  $x'x$ . Αν η ευθεία  $\varepsilon$  είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$  τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία  $\omega = 0$ .

Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία  $\omega$  ισχύει  $0^{\circ} \leq \omega < 180^{\circ}$  ή σε ακτίνια  $0 \leq \omega < \pi$ .



σχ. 1



σχ.2

Πως ορίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ( $\varepsilon$ )  
Πότε είναι θετικός, αρνητικός, μηδέν  
Πότε δεν ορίζεται

Ως συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ( $\varepsilon$ ) ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$  που σχηματίζει η  $\varepsilon$  με τον άξονα .

Είναι:

- θετικός, αν η γωνία  $\omega$  που σχηματίζει με τον άξονα είναι οξεία (σχ.1)
- αρνητικός, αν είναι αμβλεία.(σχ.2)
- Αν η ευθεία σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  μηδενική

## Η θεωρία στην ευθεία σε ερωτήσεις - απαντήσεις

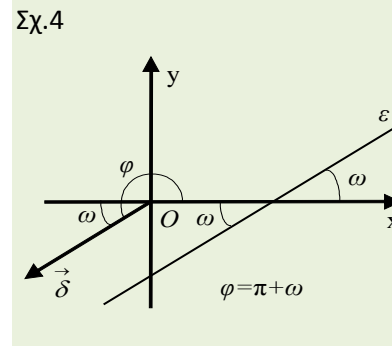
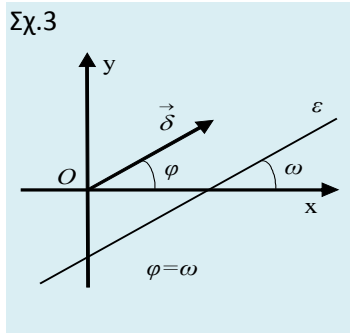
γωνία, δηλαδή είναι παράλληλη στον άξονα  $x$ , ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με μηδέν.

- Στην περίπτωση που η γωνία της ευθείας  $\varepsilon$  με τον άξονα  $x$  είναι  $90^\circ$ , δηλαδή η ευθεία  $\varepsilon$  είναι κάθετη στον άξονα, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την ευθεία αυτή.

Αποδείξτε την πρόταση :

“Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης”.

Έστω ένα διάνυσμα  $\vec{\delta}$  παράλληλο σε μια ευθεία  $\varepsilon$ . Αν  $\varphi$  και  $\omega$  είναι οι γωνίες που σχηματίζουν το  $\vec{\delta}$  και η  $\varepsilon$  με τον  $x'x$  αντίστοιχα, τότε θα ισχύει  $\varphi = \omega$  ή  $\varphi = \pi + \omega$  και επομένως  $\varepsilon\varphi = \varepsilon\omega$ . (σχ.3 – σχ.4)



Αποδείξτε την πρόταση :

Ο συντελεστής διεύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$ , με  $x_1 \neq x_2$  είναι  $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες δύο σημείων μιας μη κατακόρυφης ευθείας  $\varepsilon$ , δηλαδή μιας ευθείας που δεν είναι κάθετη στον άξονα  $x'x$ , τότε μπορούμε να βρούμε και το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας αυτής. Πράγματι, αν  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  είναι δύο σημεία της ευθείας  $\varepsilon$ , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της  $\varepsilon$  είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος  $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ , δηλαδή ίσος με  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

Επομένως:  $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

## Η θεωρία στην ευθεία σε ερωτήσεις - απαντήσεις

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ .

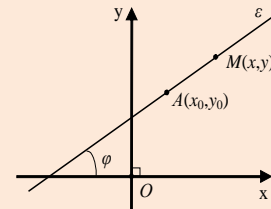
Έστω  $Oxy$  ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και  $A(x_0, y_0)$  ένα σημείο του επιπέδου. Ζητάμε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  που διέρχεται από το  $A$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ .

Ένα σημείο  $M(x, y)$  διαφορετικό του  $A(x_0, y_0)$  ανήκει στην  $\varepsilon$ , αν και μόνο αν το διάνυσμα  $\overrightarrow{AM}$  είναι παράλληλο στην  $\varepsilon$ , δηλαδή

αν και μόνο αν το  $\overrightarrow{AM}$  και η  $\varepsilon$  έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Επειδή

$\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ , έχουμε

$$\lambda_{\overrightarrow{AM}} = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$



Επομένως, το σημείο  $M(x, y)$  ανήκει στην  $\varepsilon$  αν και μόνο αν  $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda$  ή  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ . Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο  $A(x_0, y_0)$ .

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$ , που διέρχεται από τα σημεία :

$A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$

με  $x_1 \neq x_2$

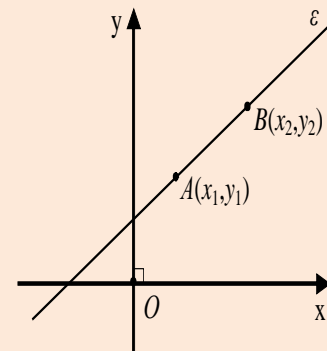
Έστω  $\varepsilon$  η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$ .

Αν  $x_1 \neq x_2$ , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ και επομένως η}$$

εξίσωση  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$  γίνεται:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$



Πότε **δεν μπορούμε** να

χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις

$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$  και

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

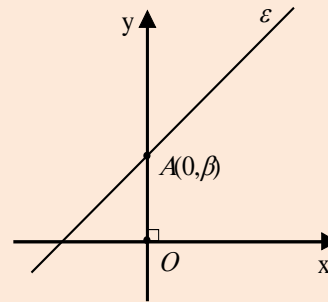
Οι εξισώσεις  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$  και  $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν, όταν η ευθεία  $\varepsilon$  είναι κατακόρυφη, αφού στην περίπτωση αυτή δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. Όμως η εξίσωση μιας κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  μπορεί να βρεθεί αμέσως, αφού κάθε σημείο της  $M$  έχει τετμημένη  $x_0$  και άρα η εξίσωσή της είναι:  $x = x_0$

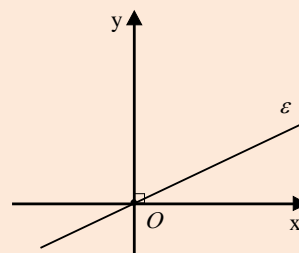
## Η θεωρία στην ευθεία σε ερωτήσεις - απαντήσεις

Ποιες είναι οι ειδικές μορφές της εξίσωσης ευθείας

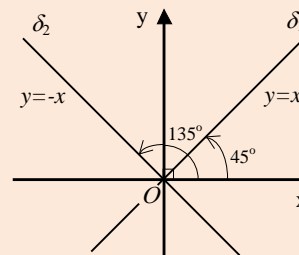
- Η εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $A(0, \beta)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  είναι  $y - \beta = \lambda(x - 0)$ , η οποία τελικά γράφεται  $y = \lambda x + \beta$ .



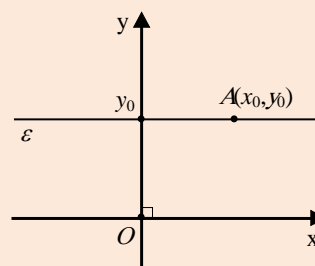
- Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ , τότε η εξίσωσή της είναι  $y - 0 = \lambda(x - 0)$  ή  $y = \lambda x$ .



- οι διχοτόμοι των γωνιών  $x\hat{O}y$  και  $y\hat{O}x'$  έχουν εξισώσεις  $y = x$  και  $y = -x$  αντιστοίχως.



- αν μια ευθεία διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ , δηλαδή είναι όπως λέμε μια οριζόντια ευθεία, έχει εξίσωση  $y - y_0 = 0(x - x_0)$ , δηλαδή  $y = y_0$ .



Να αποδείξετε το θεώρημα :

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

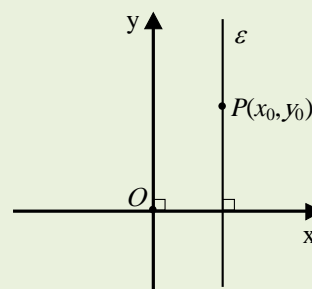
$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με} \\ A \neq 0 \quad \text{ή} \quad B \neq 0 \\ (1)$$

και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή

- Έστω  $\varepsilon$  μια ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο.
- ✓ Αν η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον άξονα  $yy'$  στο σημείο  $\Sigma(0, \beta)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ , τότε θα έχει εξίσωση  $y = \lambda x + \beta$ , η οποία γράφεται  $\lambda x + (-1)y + \beta = 0$
- ✓ Αν η ευθεία  $\varepsilon$  είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο  $P(x_0, y_0)$ , τότε θα έχει εξίσωση  $x = x_0$ , η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$x + 0 \cdot y + (-x_0) = 0.$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι και στις δύο περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  παίρνει τη μορφή  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$ .



- Αντιστρόφως, έστω η εξίσωση

$$Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με} \quad A \neq 0 \quad \text{ή} \quad B \neq 0.$$

- ✓ Αν  $B \neq 0$ , τότε η εξίσωση γράφεται  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$ , που είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = -\frac{A}{B}$  και η οποία τέμνει τον άξονα  $yy'$  στο σημείο  $\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$ .
- ✓ Αν  $B = 0$ , τότε, λόγω της υπόθεσης, είναι  $A \neq 0$  και η εξίσωση γράφεται  $x = -\frac{\Gamma}{A}$ , που είναι εξίσωση ευθείας κάθετης στον άξονα  $x'x$  στο σημείο του  $P\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$ .

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις η εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$  παριστάνει ευθεία.

## Η θεωρία στην ευθεία σε ερωτήσεις - απαντήσεις

Να αποδείξετε ότι:

Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .

Έστω  $Oxy$  ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και  $\varepsilon$  μια ευθεία του επιπέδου με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$ . Είδαμε προηγουμένως ότι:

- ✓ Αν  $B \neq 0$ , τότε η  $\varepsilon$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = -\frac{A}{B}$  και επομένως είναι παράλληλη προς το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .
- ✓ Αν  $B = 0$ , τότε η  $\varepsilon$  είναι παράλληλη προς τον άξονα  $yy'$  και επομένως παράλληλη και πάλι προς το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .

Να αποδείξετε ότι :

Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{n} = (A, B)$ .

το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$  είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\vec{n} = (A, B)$ , αφού

$$\vec{\delta} \cdot \vec{n} = (B, -A) \cdot (A, B) = AB - AB = 0.$$

Επομένως:

Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{n} = (A, B)$ .

Έστω  $\varepsilon$  μια ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου, με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  και  $M_0(x_0, y_0)$  ένα σημείο εκτός αυτής. Ποιος είναι ο τύπος της απόστασης του σημείου  $M$  από την ευθεία  $\varepsilon$

Είναι :

$$d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Έστω  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  και  $\Gamma(x_3, y_3)$  τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου που δεν είναι συνευθειακά. Ποιος είναι ο τύπος για το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$

Είναι :

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})|$$

Ποιος ο τύπος για την εύρεση της απόστασης των ευθειών  $\varepsilon_1 : y = \lambda x + \beta_1$  και  $\varepsilon_2 : y = \lambda x + \beta_2$  (παράλληλες)

Είναι :

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$