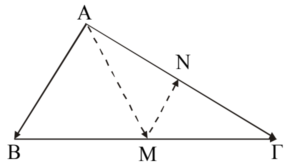
1. α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta}$ όπου $\overrightarrow{A\Delta}$ η διαγώνιος του παραλληλογράμμου με πλευρές ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ και $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{A\Delta}$.



β) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\Gamma N} - \overrightarrow{\Gamma M} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{\Gamma B}) = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BA}$

2. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A'} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'B'} = 2\,\overrightarrow{MM'}$

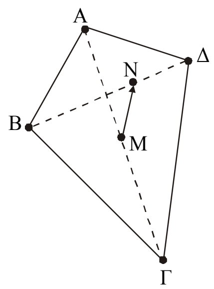
3. α) $\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{BA} = 2\,\overrightarrow{NA}$ (1)

$\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\,\overrightarrow{N\Gamma}$ (2)

Ακόμη: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} = 0$ (3)

Από (1), (2) με πρόσθεση και λόγω της (3) προκύπτει η (α).

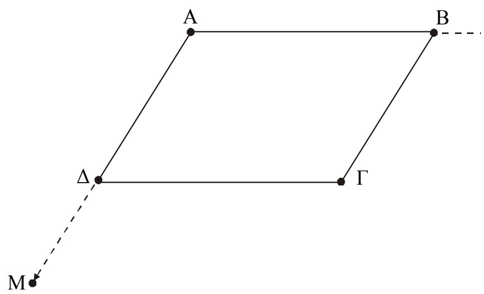
β) Πρόσθεση των (1), (2).



4. $\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

$\overrightarrow{\Gamma N} = \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$,

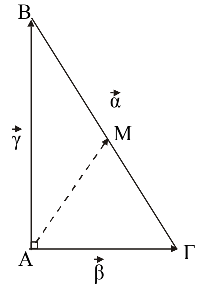
άρα $\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma N}$.



5. Αν $\hat{A} = 1^L$ τότε $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 0$

Ακόμη $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{\beta} + \vec{\gamma})$, άρα $4\overrightarrow{AM} = \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 = \vec{\alpha}^2$,

άρα $|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2}|\vec{\alpha}|$.



6. Έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \kappa\vec{\alpha}$.

Τότε $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{MA} + \vec{\alpha} + \overrightarrow{M\Delta} + \kappa\vec{\alpha} = (\kappa + 1)\,\vec{\alpha}$,

άρα $\overrightarrow{MN} = \frac{\kappa+1}{2}\,\vec{\alpha}$, δηλαδή $\overrightarrow{MN} \;//\; \overrightarrow{AB}$.

7. Αφού $\hat{A} = 1^L$ άρα $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 0$. Ακόμη $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}$,

άρα $|\overrightarrow{B\Gamma}|^2 = |\overrightarrow{A\Gamma}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2$.

8. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B}$ (1) $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B}$ (2)

Πολλαπλασιασμός των (1), (2) και χρήση των ισοτήτων

$\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 0$

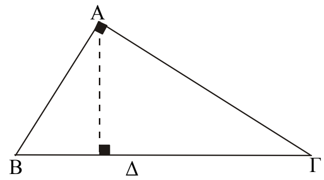
9. Ισχύει $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B}$ (1)

και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 0$

$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ (2)

και $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta B} = 0$, $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 0$

και πολλαπλασιάζουμε τις (1), (2) κατά μέλη.



10. α) Ισχύει $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = 2\overrightarrow{AM}$ (1)

Ακόμη $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma B}$ (2)

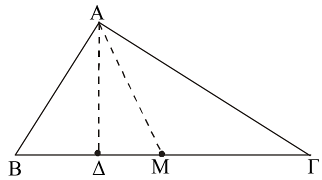
Υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέλη των (1), (2) και προσθέτουμε κατά μέλη.

β) Ισχύουν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ (1)

$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{M\Gamma}$ (2)

ενώ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{M\Gamma}$ (3)

και $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta} = \dfrac{\overrightarrow{B\Gamma}}{2} \cdot \overrightarrow{M\Delta}$ (4)



Αν υψωθούν στο τετράγωνο οι (1), (2) και μετά αφαιρεθούν κατά μέλη, τότε βάσει των (3), (4) προκύπτει η ζητούμενη.

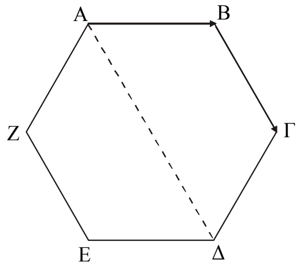
12. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$

13. α) Ισχύει $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{B\Gamma} = 2\vec{\beta}$, άρα

$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0$

β) Ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Delta} = 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{\beta} + (\vec{\beta} - \vec{\alpha})$ και πρόσθεση όλων κατά μέλη.



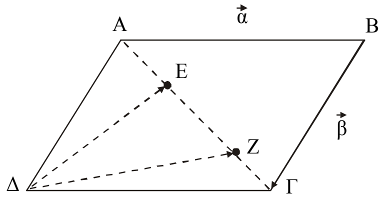
14. $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$

15. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Delta} + 2\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{PB} + (\overrightarrow{P\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) + 2\overrightarrow{AB} =$ $2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{0}$ αφού $\overrightarrow{P\Gamma} = -2\overrightarrow{PB}$ και $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{0}$ λόγω παραλληλογράμμου.

16. $2\overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{K\Delta} + \overrightarrow{K\Gamma} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}$

17. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$, άρα $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \overrightarrow{AP}$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε $2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AP}$ (1)

Άρα το Ρ βρίσκεται πάνω στη διάμεσο ΑΜ και λόγω της (1) είναι το κέντρο βάρους.



18. α) $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \vec{\beta}$

$\overrightarrow{\Delta Z} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{A\Delta} - \frac{3}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \vec{\beta}$

β) $\overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{\Gamma B} - \overrightarrow{\Gamma Z} = -\vec{\beta} - [-\frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})] = \overrightarrow{\Delta E}$

19. Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει: $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{P\Gamma} - 3\overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$ άρα $2(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{P\Gamma}) = 3(\overrightarrow{P\Gamma} - \overrightarrow{PB})$, δηλαδή $\overrightarrow{\Gamma A} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$.

21. $\overrightarrow{M_1M_2} = (-b, -a)$, $\overrightarrow{M_2M_3} = (2b, 2a)$, ;ara $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \overrightarrow{M_2M_3}$

22. Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει: $\overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ άρα $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$, δηλαδή $\overrightarrow{A\Gamma} \parallel \overrightarrow{AB}$.

23. α) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} =$

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{\Gamma G} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1\Gamma_1} = \vec{0}$

αφού $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$ και $\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1\Gamma_1} = \vec{0}$

β) Με βάση την (α), αν $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = \vec{0}$, τότε $\overrightarrow{GG_1} = \vec{0}$, δηλαδή συμπίπτουν τα G, G_1.

24. $\overrightarrow{ΣA} + \overrightarrow{ΣB} = 2\overrightarrow{ΣK}$, $\overrightarrow{ΣA} + \overrightarrow{ΣΓ} = 2\overrightarrow{ΣΛ}$, $\overrightarrow{ΣB} + \overrightarrow{ΣΓ} = 2\overrightarrow{ΣM}$
και πρόσθεση κατά μέλη.

25. α) $\overrightarrow{ΔZ} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AΔ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AΓ} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{ΔE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BΔ} = 2(\overrightarrow{AΓ} - \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AΓ} - \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$

β) Ισχύει $\overrightarrow{ΔE} = \frac{5}{2}\overrightarrow{ΔZ}$, άρα $\overrightarrow{ΔE} \parallel \overrightarrow{ΔZ}$.

26. Η δοσμένη σχέση γράφεται: $(κ + 2)\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (κ + 2)\overrightarrow{PΓ} + 3\overrightarrow{PΓ}$, άρα $(κ + 2)\overrightarrow{ΓA} = 3\overrightarrow{BΓ}$, άρα $\overrightarrow{ΓA} \parallel \overrightarrow{BΓ}$.

27. $3\overrightarrow{BΛ} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AΛ}$, $2\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$, οπότε η δοσμένη γίνεται:

$5\overrightarrow{AΛ} + 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AK} = \vec{0}$ ή $3\overrightarrow{AΛ} + 2\overrightarrow{AΛ} + 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AK} = \vec{0}$,

άρα $3\overrightarrow{MΛ} = 2\overrightarrow{ΛK}$, άρα $\overrightarrow{KΛ}$, $\overrightarrow{MΛ}$ αντίρροπα.

28. Έστω A (x_1, y_1) και B (x_2, y_2), τότε το μέσο M του AB έχει τετμημένη $\frac{x_1 + x_2}{2} = 7$, άρα $x_1 + x_2 = 14$, όμως x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, άρα $λ^2 - 5λ + 20 = 14$, δηλαδή $λ = 3$ ή $λ = 2$.

30. $\overrightarrow{AB} = (-4, 2)$ $\qquad \overrightarrow{B\Gamma} = (-1, -2)$ $\qquad \overrightarrow{A\Gamma} = (-3, 4)$

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Β.

31. Έστω Μ (x, 0) το ζητούμενο σημείο. Τότε:

α) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, άρα $(x - 3)^2 + 4 = (x - 7)^2 + 16$

β) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

35. Αν (x, y) το ζητούμενο σημείο, τότε ισχύει: $\dfrac{3+1+x}{3} = 3$ και $\dfrac{0+2+y}{3} = 2$.

37. α) $2\sqrt{3}$ $\qquad$ β) 12 $\qquad$ γ) $12 + 4\sqrt{3}$

δ) $\sqrt{12+4\sqrt{3}}$ $\qquad$ ε) $8\vec{\alpha}^{\,2} - 15\vec{\beta}^{\,2} + 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta}$

38. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 = \vec{\alpha}^{\,2} + \vec{\beta}^{\,2} + \vec{\gamma}^{\,2} + 2\,(\vec{\alpha}\,\vec{\beta} + \vec{\alpha}\,\vec{\gamma} + \vec{\beta}\,\vec{\gamma})$

40. Αν ω η ζητούμενη γωνία τότε:

συνω = $\dfrac{(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{\alpha}}{|\vec{\beta} - \vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}|}$, αλλά $(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}\,\vec{\beta} - \vec{\alpha}^{\,2} = 4 - 4 = 0$,

άρα συνω = 0, δηλαδή $\omega = \dfrac{\pi}{2}$.

41. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^{\,2} + \vec{\beta}^{\,2} + 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 2 + 2$συνθ $= 2\,(1 +$ συνθ$) = 4$συν$^2 \dfrac{\theta}{2}$, άρα

$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2\left|\text{συν}\dfrac{\theta}{2}\right|$.

42. Ισχύουν $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 0$, $\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 0$ και $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\,\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 4$

44. $3\vec{v} - 5\vec{u} = (22, -24)$, αν $\vec{w} = (x, y)$, τότε πρέπει $22x - 24y = 0$ (1)

δηλαδή υπάρχουν άπειρα διανύσματα $\vec{w}$ των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την (1).

45. $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \frac{1}{2}$ και ισχύει: $\vec{x} = \kappa(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta}(\vec{\alpha} + \vec{x}) = 0$, άρα $\vec{\beta}\,\vec{\alpha} + \vec{\beta}\,\vec{x} = 0$,

δηλαδή $\frac{1}{2} + \vec{\beta}\,[\kappa(\vec{\alpha} + \vec{\beta})] = 0$, άρα $\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2} + \kappa = 0$, οπότε $\kappa = -\frac{1}{3}$.

46. Έστω $\vec{\beta}_1 = (x_1, y_1)$ και $\frac{1}{2}$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ οι συνιστώσες. Τότε ισχύει:

$\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 = \vec{\beta}$ (1), $\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2 = 0$ (2) και $\vec{\beta}_2 \,/\!/\, \vec{\alpha}$ (3)

οπότε προκύπτει το σύστημα:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ y_1 + y_2 &= 10 \\ x_1x_2 + y_1y_2 &= 0 \\ x_2 + y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Το σύστημα δίνει για λύση $x_2 = y_2 = \frac{15}{2}$ και $x_1 = -\frac{5}{2}$, $y_1 = \frac{5}{2}$.

47. Πολλαπλασιάστε και τα δύο μέλη με $\vec{\alpha}$.

48. α) $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot|\sigma\upsilon\nu\omega| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot|\sigma\upsilon\nu\omega| \leq |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ όπου ω η γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

β) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (6, -8)$ και $\vec{\beta} = (x, y)$. Τότε $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 6x - 8y$, άρα από το (α) ισχύει $|6x - 8y| \leq 6\cdot 10$, άρα $-60 \leq A \leq 60$.

γ) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (6, -8)$ και $\vec{\beta} = (\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu y)$. Τότε $|\vec{\beta}| = 1$, άρα $|6\eta\mu x - 8\sigma\upsilon\nu y| \leq 6 < 10$.

49. Η δοσμένη σχέση γράφεται: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma})\,\overrightarrow{AM} = 0$, όμως $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = 2\,\overrightarrow{A\Delta}$ (ΑΔ διάμεσος), άρα ισχύει $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$, δηλαδή $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{A\Delta}$, άρα το Μ κινείται σε ευθεία κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α.

50. $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{\vec{\beta}^{\,2}}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\beta} - \vec{x}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{x} - \vec{x}\cdot\vec{\beta} = 0$

54. α) $(\lambda\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta})(\kappa\vec{\alpha} - 2\lambda\vec{\beta}) = 0$, οπότε για $\lambda = 0$ και $\kappa = 1$ προκύπτει $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 0$.

β) Για $\kappa = \lambda = 1$ προκύπτει $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 0$ ή $\vec{\alpha}^{\,2} - \vec{\alpha}\,\vec{\beta} + 2\vec{\beta}^{\,2} = 0$ και με βάση την (α) $\vec{\beta}^{\,2} = 2$ ή $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$.

55. Από τις δοσμένες σχέσεις έχουμε:

$\vec{\alpha}^{\,2} + \vec{\beta}^{\,2} + 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \vec{\alpha}^{\,2}$

$\vec{\alpha}^{\,2} + \vec{\beta}^{\,2} + 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = \vec{\beta}^{\,2}$ δηλαδή

$2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = -\vec{\alpha}^{\,2} = -\vec{\beta}^{\,2}$, άρα

$\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 = \vec{\alpha} + \vec{\beta}^{\,2} - 2\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}^{\,2} + \vec{\alpha}^{\,2} = 3\vec{\alpha}^{\,2}$

56. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = 0$, άρα $\vec{\alpha}^{\,2} + \vec{\beta}^{\,2} + \vec{\gamma}^{\,2} + 2(\vec{\alpha}\,\vec{\beta} + \vec{\beta}\,\vec{\gamma} + \vec{\alpha}\,\vec{\gamma}) = 0$, άρα

$\vec{\alpha}\,\vec{\beta} + \vec{\beta}\,\vec{\gamma} + \vec{\alpha}\,\vec{\gamma} = -19$.