**Ερωτήσεις ανάπτυξης**

1. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΑ να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma})$

β) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

2. ** Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$. Αν Μ και Μ΄ είναι μέσα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$ να αποδείξετε ότι:

$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{MM'}$

3. ** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι αντιστοίχως τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta})$

β) $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B}$

4. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Μ, Ν τέτοια ώστε να είναι: $\overrightarrow{\Delta M} = \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Γ και Ν είναι συνευθειακά.

5. ** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως: αν η διάμεσος ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

**6.** ** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του. Να αποδειχθεί ότι:

α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι παράλληλο προς τις βάσεις του

β) $\overrightarrow{\text{ΜΝ}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{ΑΒ}} + \overrightarrow{\text{ΔΓ}})$

**7.** ** Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α να αποδείξετε ότι ισχύει:

$\overrightarrow{\text{ΑΒ}}^2 + \overrightarrow{\text{ΑΓ}}^2 = \overrightarrow{\text{ΒΓ}}^2$ και αντιστρόφως:

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}^2 + \overrightarrow{\text{ΑΓ}}^2 = \overrightarrow{\text{ΒΓ}}^2$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.

**8.** ** Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α = 90°) να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}^2 = \overrightarrow{\text{ΒΓ}} . \overrightarrow{\text{ΒΔ}}$ και αντιστρόφως: Αν ΑΔ είναι το ύψος τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}^2 = \overrightarrow{\text{ΒΓ}} . \overrightarrow{\text{ΒΔ}}$ να αποδείξετε ότι Α = 90°.

**9.** ** Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α = 90°) να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}^2 = \overrightarrow{\text{ΓΔ}} . \overrightarrow{\text{ΔΒ}}$ και αντιστρόφως: Αν ΑΔ είναι το ύψος τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}^2 = \overrightarrow{\text{ΓΔ}} . \overrightarrow{\text{ΔΒ}}$ τότε να αποδείξετε ότι Α = 90°.

**10.** ** Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι:

α) $|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}|^2 + |\overrightarrow{\text{ΑΓ}}|^2 = 2\,|\overrightarrow{\text{ΑΜ}}|^2 + \frac{|\overrightarrow{\text{ΒΓ}}|^2}{2}$

β) $|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}|^2 - |\overrightarrow{\text{ΑΓ}}|^2 = 2\,\overrightarrow{\text{ΔΜ}} . \overrightarrow{\text{ΓΒ}}$, όπου Δ η προβολή του Α στη ΒΓ.

**11.** ** Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{5}{2}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \frac{1}{2}[\vec{\alpha} - 3(2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 6\vec{\gamma}) + 4(3\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma})] - \frac{1}{2}\vec{\beta} - 10\vec{\gamma}$$

**12.** ** Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Κ το κέντρο του, Μ το μέσον του ΚΓ. Δείξτε ότι:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = 4\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{A\Gamma}$

**13.** ** Αν ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο, με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$

α) Υπολογίστε τα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{AE}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

β) Δείξτε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} = 6\overrightarrow{B\Gamma}$

**14.** ** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει:

$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$

**15.** ** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{P\Gamma} = -2\overrightarrow{PB}$. Να αποδειχτεί ότι:

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Delta} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

**16.** ** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ, ΓΔ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι:

$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{K\Lambda}$

**17.** ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$

**18.** ** Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ της διαγωνίου ΑΓ έτσι ώστε: $AE = Z\Gamma = \frac{1}{4}A\Gamma$

α) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο

**19.** ** Αν ισχύει $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 5\overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

**20.** ** Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, -7)$, $\vec{\gamma} = (-2, 5)$ να βρεθούν τα διανύσματα:

$\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 8\vec{\gamma}$

**21.** ** Να εξετασθεί αν τα σημεία $M_1(\alpha+\beta, \alpha-\beta)$, $M_2(\alpha, -\beta)$ και $M_3(\alpha+2\beta, 2\alpha-\beta)$ είναι συνευθειακά.

**22.** ** Δίνονται τέσσερα σημεία Ο, Α, Β, Γ τέτοια ώστε τα Ο, Α, Β δεν είναι συνευθειακά. Να δείξετε ότι, αν και $\overrightarrow{O\Gamma} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, $\lambda \in R$ τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

**23.** ** Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και $A_1$, $B_1$, $\Gamma_1$. Αν G και $G_1$ είναι αντιστοίχως τα βαρύκεντρα των τριγώνων αυτών να αποδειχθεί ότι:

α) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = 3\overrightarrow{GG_1}$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και $A_1B_1\Gamma_1$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο, αν και μόνο αν $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = \vec{0}$

**24.** ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Κ, Λ, Μ είναι μέσα αντιστοίχως των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ και Σ σημείο του επιπέδου του τριγώνου να αποδειχθεί ότι:

$\overrightarrow{\Sigma K} + \overrightarrow{\Sigma \Lambda} + \overrightarrow{\Sigma M} = \overrightarrow{\Sigma A} + \overrightarrow{\Sigma B} + \overrightarrow{\Sigma \Gamma}$

**25.** ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ ώστε να ισχύει

$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

**26.** ** Να αποδείξετε ότι αν:

$(\kappa+2)\,\overrightarrow{PA}+3\,\overrightarrow{PB}=(\kappa+5)\,\overrightarrow{P\Gamma}$ τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

**27.** ** Εάν $2\,\overrightarrow{A\Lambda}+3\,\overrightarrow{B\Lambda}+2\,\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BK}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{K\Lambda}$ και $\overrightarrow{M\Lambda}$ είναι αντίρροπα.

**28.** ** Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οxψ θεωρούμε τα σημεία Α, Β του x΄x, τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 20)x - 1998 = 0$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in R$ ώστε το μέσο του ΑΒ να έχει τετμημένη 7.

**29.** ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-1, 3)$ και $\vec{v} = (2, -1)$. Να βρεθούν οι συνεταγμένες του διανύσματος $\vec{w} = (x, y)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

β) $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$

γ) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = \vec{0}$

δ) $\vec{w} = \kappa\vec{u} + \lambda\vec{v}$ με $\kappa, \lambda \in R$

**30.** ** Δίνονται τα σημεία Α (5, - 1), Β (1, 1) και Γ (2, 3). Να μελετηθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ.

**31.** ** Δίνονται τα σημεία Α (3, 2), Β (7, - 4). Να βρεθεί σημείο Μ του x΄x, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι:

α) ισοσκελές με κορυφή το Μ

β) ορθογώνιο στο Μ

**32.** ** Να εξετάσετε αν τα σημεία Α (- 6, 1), Β (- 2, 3) και Γ (- 10, - 1) είναι συνευθειακά.

**33.** ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 4)$ και $\vec{\beta} = (3, -2)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{u} = (\chi, \psi)$ έτσι ώστε να είναι:

α) $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β) $\vec{\alpha} + \vec{u} = \vec{\beta}$

γ) $\vec{u} = \kappa\vec{\alpha}$, $\kappa \in R$

δ) $\vec{u} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, $\kappa, \lambda \in R$

ε) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{u} = 0$

**34.** ** Αν $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-2, 3)$ να υπολογιστούν τα:

α) $\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}\right|$

β) $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| + \left|\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right| + \left|\vec{\gamma} + \vec{\alpha}\right|$

**35.** ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (3, 0) και Β (1, 2) και G (3, 2), όπου G το βαρύκεντρό του. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ.

**36.** ** Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

β) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 75°$

γ) $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 135°$

**37.** ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ β) $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$ γ) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$

δ) $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|$ ε) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$

**38.** ** Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\gamma}| = 2$ ($\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά).

**39.** ** Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων:
$\vec{\alpha} = (-1, 4)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$.

**40.** ** Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 45°$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{\alpha}, \vec{\alpha})$.

**41.** ** Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία, να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2\left|συν\frac{θ}{2}\right|$.

**42.** ** Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$, δείξτε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

**43.** ** Αν $\vec{u}(-3 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $\vec{v}(-1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $0 < (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) < \pi$ να αποδείξετε ότι: $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{12}$.

**44.** ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-2, 3)$ και $\vec{v} = (4, -3)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$ ώστε να είναι $\vec{w} \perp (3\vec{v} - 5\vec{u})$.

**45.** ** Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x} // (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{x})$.

**46.** ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (5, 10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

**47.** ** Αν $\vec{x} + (\vec{x}\,.\,\vec{\alpha}).\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ με $1 + \vec{\alpha}\,\vec{\beta} \neq 0$ να αποδείξετε ότι $\vec{x}\,.\,\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\alpha}.\vec{\gamma}}{1 + \vec{\alpha}.\vec{\beta}}$.

**48.** ** α) Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$\left|\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta}\right| \leq \left|\vec{\alpha}\right|.\left|\vec{\beta}\right|$$

β) Χρησιμοποιώντας το (α) ερώτημα να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = 6x - 8\psi$ αν $x^2 + \psi^2 = 36$.

γ) Με τη βοήθεια του (α) ερωτήματος αποδείξτε ότι: $\left|6.\eta\mu x - 8.\sigma\upsilon\nu x\right| \leq 10$

**49.** ** Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου του για τα οποία ισχύει:

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma}\,.\,\overrightarrow{AM} = 0.$

**50.** ** Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\beta}.\vec{x}}{\vec{\beta}^2}.\vec{\beta} - \vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$.

**51.** ** Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα διανύσματα που δίνονται είναι κάθετα μεταξύ τους.

α) $\vec{\beta} - \dfrac{(\vec{\alpha}\vec{\beta})\,\vec{\alpha}}{\vec{\beta}^2}$ και $\vec{\beta}$

β) $(\vec{\beta}\,.\,\vec{\alpha}).\vec{\gamma} - (\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta})\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}$

γ) $\vec{\beta} - \dfrac{(\vec{\alpha}\vec{\beta})\,\vec{\alpha}}{\vec{\alpha}^2}$ και $\vec{\alpha}$

**52.** ** Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

α) $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$

β) $\vec{p} // \vec{\alpha}$

γ) $\vec{q} \perp \vec{\beta}$

**53.** ** Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$ με $\vec{p} // \vec{\beta}$ και $\vec{q} \perp \vec{\beta}$ να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α) $\vec{p} = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} . \vec{\beta}$

β) $\vec{q} = \vec{\alpha} - \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} . \vec{\beta}$

**54.** ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε να είναι:

$(\lambda\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}) \perp (\kappa\vec{\alpha} - 2\lambda\vec{\beta})$ για κάθε κ, $\lambda \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

β) Να βρεθεί το $|\vec{\beta}|$ στην περίπτωση που είναι $|\vec{\alpha}| = 2$.

**55.** ** Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι: $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| . \sqrt{3}$

**56.** ** Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $|\vec{\gamma}| = 5$ υπολογίστε το: $\vec{\alpha} . \vec{\beta} + \vec{\beta} . \vec{\gamma} + \vec{\gamma} . \vec{\alpha}$