

## Ασκήσεις στο 4ο κεφάλαιο

---

### Άσκηση 1

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με την γωνία  $A$  ορθή. Από την κορυφή  $B$  φέρουμε κάθετη στην πλευρά  $AB$  και λαμβάνουμε τμήμα  $BD = B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι η  $D\Gamma$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Gamma$ . ( Δύο περιπτώσεις, της εσωτερικής ή της εξωτερικής της γωνίας  $\Gamma$  )

### Άσκηση 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $OBA$  με την γωνία  $B$  ορθή. Η διχοτόμος της γωνίας  $A$  τέμνει την  $OB$  στο σημείο  $\Gamma$ . Φέρουμε κάθετη στην  $OB$  στο σημείο  $\Gamma$  η οποία τέμνει την  $OA$  στο σημείο  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Gamma\Delta A$  είναι ισοσκελές.

### Άσκηση 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στην κορυφή  $A$  και προς το μέρος της  $A\Gamma$  φέρουμε κάθετη στην  $A\Gamma$  και λαμβάνουμε σε αυτή τμήμα  $AD = B\Gamma$ . Φέρουμε το ύψος  $BE$ . Να αποδείξετε ότι η  $BD$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $ABE$ .

### Άσκηση 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  και έστω  $\Delta$  τυχαίο σημείο της βάσης του  $B\Gamma$ . Έστω  $M, N$  τα μέσα των  $BD$  και  $D\Gamma$  αντίστοιχα. Οι κάθετες στη  $B\Gamma$  στα σημεία  $M, N$  τέμνουν τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η γωνία  $E\Delta Z$  είναι ίση με την γωνία  $A$  του τριγώνου

### Άσκηση 5

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  και έστω  $\Delta$  τυχαίο σημείο της βάσης του  $B\Gamma$ . Φέρουμε  $\Delta E$  κάθετη στην  $A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι η γωνία  $A$  είναι διπλάσια της γωνίας  $E\Delta\Gamma$ .

### Άσκηση 6

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με την γωνία  $A = 78^\circ$ . Στην βάση του  $B\Gamma$  λαμβάνουμε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  ώστε να είναι  $BD = AB$  και  $\Gamma E = A\Gamma$ . Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$ .

### Άσκηση 7

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  η διαφορά της γωνίας  $\Gamma$  από την γωνία  $B$  είναι  $90^\circ$ . Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας  $A$  σχηματίζει με την πλευρά  $B\Gamma$  γωνία  $45^\circ$ .

### Άσκηση 8

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με την γωνία  $A$  ορθή και  $AB > A\Gamma$ . Έστω  $AD$  το ύψος του. Στην προέκταση της  $\Gamma D$  λαμβάνουμε τμήμα  $\Delta E = \Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι η διαφορά της γωνίας  $B$  από την γωνία  $AEB$  είναι  $90^\circ$ .

## Ασκήσεις στο 4ο κεφάλαιο

### Άσκηση 9

Οι διχοτόμοι των γωνιών  $\Delta$  και  $\Gamma$  ενός κυρτού τετραπλεύρου  $ΑΒΓΔ$  τέμνονται στο σημείο  $Ι$ . να αποδείξετε ότι η γωνία  $ΒΙΔ$  είναι ίση με το ημίθροισμα των γωνιών  $Α$  και  $Β$ .

### Άσκηση 10

Οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών ενός κυρτού τετραπλεύρου τέμνονται στο  $Ι$ . Να αποδείξετε ότι η γωνία που σχηματίζουν είναι ίση με την ημιδιαφορά των δύο άλλων γωνιών του τετραπλεύρου.

### Άσκηση 11

Όταν οι δύο απέναντι γωνίες κυρτού τετραπλεύρου είναι ορθές να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των δύο άλλων γωνιών του είναι παράλληλες.

### Άσκηση 12

Δίνεται τρίγωνο  $ΑΒΓ$  με την γωνία  $Α = 60^\circ$ . Αν  $ΒΒ'$  και  $ΓΓ'$  είναι οι διχοτόμοι των γωνιών  $Β$  και  $Γ$  να αποδείξετε ότι οι γωνίες  $ΒΒ'Γ$  και  $ΓΓ'Α$  είναι ίσες.

### Άσκηση 13

Έστω κυρτό τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$ . Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών  $Β$  και  $Γ$  είναι ίσο με το άθροισμα των γωνιών  $Α$  και  $Δ$  του τετραπλεύρου.

### Άσκηση 14

Έστω κυρτό τετράπλευρο  $ΑΟΒΜ$ . Να αποδείξετε ότι η μη κυρτή γωνία  $ΑΜΒ$  είναι ίση με το άθροισμα των γωνιών  $Ο$  και  $Α$  και  $Β$  του τετραπλεύρου.

### Άσκηση 15

Έστω κυρτό τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$ . Οι απέναντοι πλευρές του  $ΑΔ$  και  $ΒΓ$  τέμνονται στο  $Ζ$  και οι  $ΑΒ$  με την  $ΓΔ$  στο  $Ε$ . αν οι διχοτόμοι των γωνιών  $Ε$  και  $Ζ$  τέμνονται στο  $Ι$  να αποδείξετε ότι η γωνία  $ΕΙΖ$  είναι ίση με το ημίθροισμα των γωνιών  $Β$  και  $Δ$  του τετραπλεύρου.

### Άσκηση 16

Δίνεται τρίγωνο  $ΑΒΓ$ . Τα ύψη  $ΑΔ$  και  $ΒΡ$  τέμνονται στο σημείο  $Μ$ . Αν η γωνία  $ΔΜΡ$  είναι  $132^\circ$  να βρεθεί το μέτρο της γωνίας  $Γ$  του τριγώνου.

### Άσκηση 17

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  με βάση  $ΒΓ$ . Φέρουμε τα ύψη  $ΒΒ'$  και  $ΓΓ'$ . Να αποδείξετε ότι η  $Β'Γ'$  είναι παράλληλη στη  $ΒΓ$ .

## Ασκήσεις στο 4ο κεφάλαιο

### Άσκηση 18

Οι διχοτόμοι ΚΡ και ΛΝ του τριγώνου ΚΛΜ τέμνονται στο Ο και η γωνία ΚΟΛ είναι  $100^\circ$ . Μα βρείτε το μέτρο της γωνίας Μ του τριγώνου.

### Άσκηση 19

Σε τρίγωνο ΑΒΓ, φέρνουμε τις διχοτόμους ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β, Γ αντίστοιχα. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΔΓ και ΒΕΓ τέμνονται στο Ι, να αποδείξετε ότι η γωνία ΕΙΔ είναι ίση με το  $1/4$  του αθροίσματος των γωνιών Β και Γ του τριγώνου.

### Άσκηση 20

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α ορθή φέρουμε το ύψος ΑΔ και την διχοτόμο ΑΕ της γωνίας ΔΑΓ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές και ότι η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας Β του ΑΒΓ είναι παράλληλη στη ΑΕ.

### Άσκηση 21

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ. Φέρουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Οι διχοτόμοι των γωνιών ΑΒΔ και ΑΓΕ τέμνονται στο Ι. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

### Άσκηση 22

Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Ο και Θ τέτοια ώστε η γωνία ΓΒΟ να είναι ίση με την γωνία ΑΒΘ και ίση με το  $1/3$  της γωνίας Β του τριγώνου. Επίσης η γωνία ΒΓΟ ίση με την γωνία ΑΓΘ ίση με το  $1/3$  της γωνίας Γ του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι

$$\widehat{ΒΟΓ} + \frac{\widehat{Α}}{3} = \widehat{ΒΘΓ} = 60^\circ$$

### Άσκηση 23

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με  $ΑΒ < ΑΓ$ , να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας Α τέμνει σε σημείο Δ την προέκταση της ΒΓ προς το μέρος του Β και η γωνία ΑΔΒ είναι ίση με την ημιδιαφορά των γωνιών Β και Γ.

### Άσκηση 24

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ, ΓΕ ύψη του. Προεκτείνουμε το ΒΔ προς το μέρος της κορυφής Β και λαμβάνουμε τμήμα  $ΒΒ' = ΑΓ$ . Προεκτείνουμε το ΓΕ προς το μέρος της κορυφής Γ και λαμβάνουμε τμήμα  $ΓΓ' = ΑΒ$ . Να αποδείξετε ότι  $ΑΒ' = ΑΓ'$  και ότι η γωνία ΒΑΓ' είναι ορθή.

### Άσκηση 25

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α και εκτός του τριγώνου φέρουμε την ΑΒ' κάθετη στην ΑΒ και ίση με αυτήν. Όμοια την ΑΓ' κάθετη στη ΑΓ και ίση με αυτήν. Να αποδείξετε ότι οι ΓΒ' και ΒΓ' είναι ίσες και κάθετες μεταξύ τους.