Τράπεζα Θεμάτων 2014

Γεωμετρία

4^o Θέμα

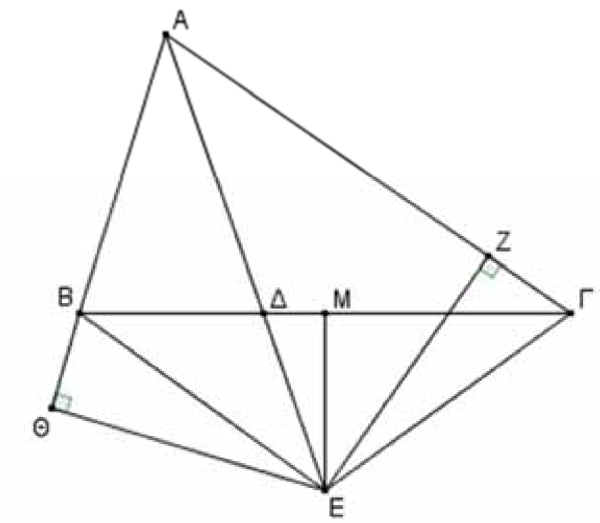
ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ, Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ, ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) $A\hat{\Gamma}E + A\hat{B}E = 180^{o}$ (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 4

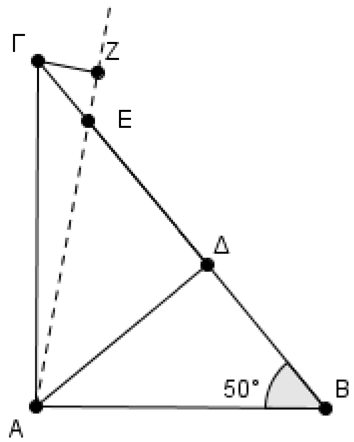
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με $\hat{B} = 50^0$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε ΔΕ=ΒΔ. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

ii. $\Gamma\hat{A}E = 10^o$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Σε μια τάξη της Α' Λυκείου στο μάθημα της Γεωμετρίας ο καθηγητής έδωσε στους μαθητές του το παρακάτω πρόβλημα:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και μία ευθεία (ε) που διέρχεται από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η εξωτερική γωνία $\hat{Γ}$ του τριγώνου είναιδιπλάσια της εσωτερικής γωνίας $\hat{Α}$.

Ζητείται, χωρίς την βοήθεια γεωμετρικών οργάνων, να χαραχθεί η διάμεσος ΒΜ του τριγώνου και η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{Γ}$.

Ο καθηγητής για να διευκολύνει τους μαθητές του, έδωσε την εξής υπόδειξη:

«Αν πάρω στην ευθεία (ε), στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ) ένα σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΒΓ τότε:

α) η ΒΔ τέμνει την ΑΓ στο μέσο Μ, (Μονάδες 12)

β) η ΓΔ είναι η ζητούμενη διχοτόμος. (Μονάδες 13)

Μπορείτε να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς αυτούς;

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει ΑΓ= ΓΔ= ΔΒ. Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν ΟΓ=ΑΓ και ΟΔ=ΔΒ.

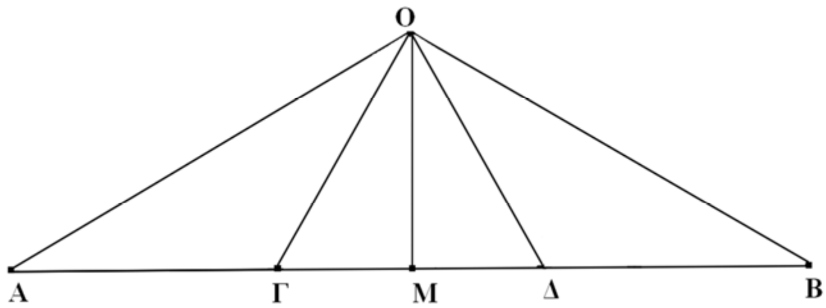
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η γωνία $\Gamma\hat{O}\Delta$ είναι 60^0 (Μονάδες 9)

ii. οι γωνίες $O\hat{A}\Gamma$, $O\hat{B}\Delta$ είναι ίσες και κάθε μια ίση με 30^0. (Μονάδες 9)

β) Αν Μ το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι 2ΟΜ=ΟΑ.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι ΓΔ= 2ΑΒ. Επίσης τα Ζ, Η, Ε είναι τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ, ΒΕ στα σημεία Θ, Ι αντίστοιχα.

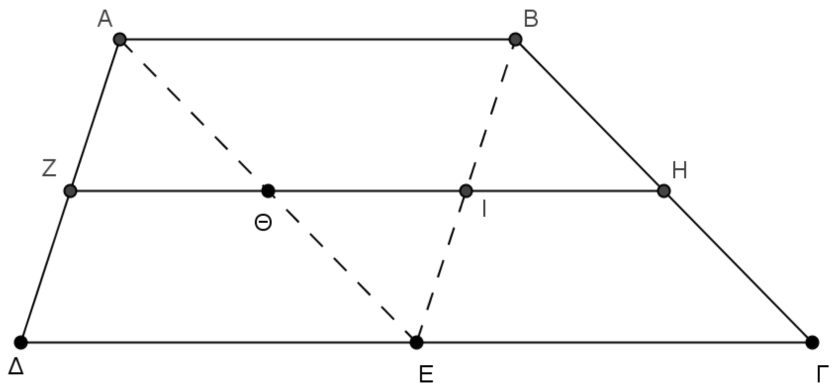
α) Να δείξετε ότι, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι, τα σημεία Θ, Ι είναι μέσα των ΑΕ, ΒΕ αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι ΖΗ = $\frac{3}{2}$ ΑΒ. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

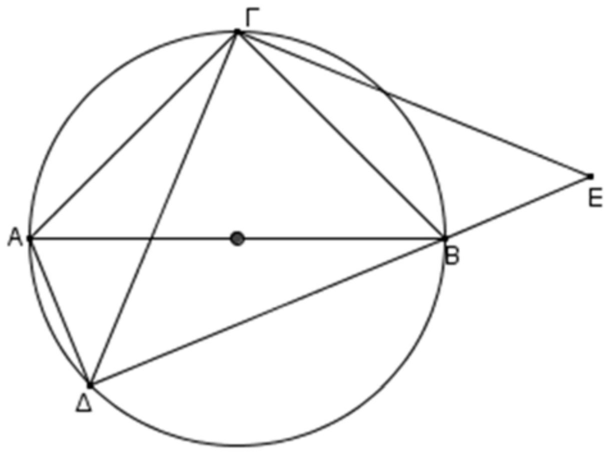
Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, και έστω ΑΒ μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΒΕ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii. Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

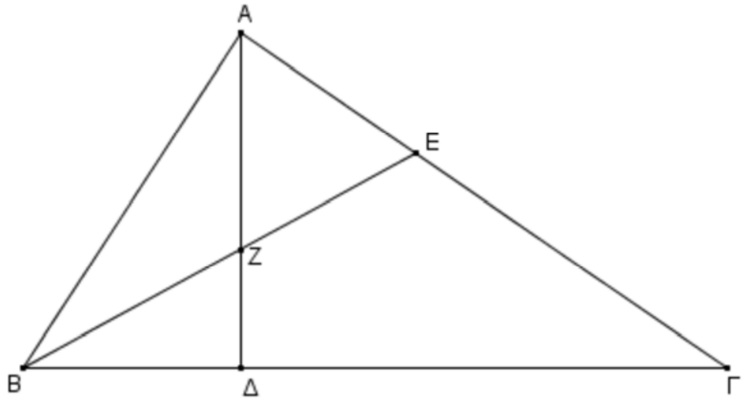
Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{\mathrm{A}}+\hat{\Gamma}=2\hat{\mathrm{B}}$ και έστω ΑΔ ύψος και ΒΕ διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{\mathrm{B}}=60^{o}$ και ΑΖ=ΒΖ. (Μονάδες 10)

ii. $\mathrm{A}\Delta=\frac{3}{2}\mathrm{BZ}$ (Μονάδες 8)

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)



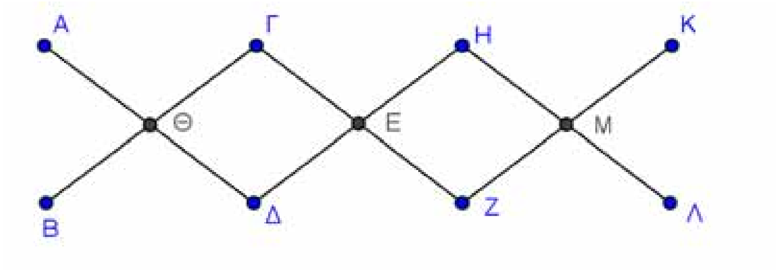
ΘΕΜΑ 4

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι **ίσα** ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι **μέσο** των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι **μέσο** των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

β) Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθεία (ε) και δυο σημεία Α, Β εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε ΑΔ, ΒΓ κάθετες στην (ε) και Μ, Ν μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

α) Αν τα Α, Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)

i) να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1) ΑΔ < ΒΓ (Μονάδες 4)

2) ΑΔ = ΒΓ. (Μονάδες 4)

ii) να εκφράσετε το τμήμα ΜΝ σε σχέση με τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. (Μονάδες 6)

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει το τμήμα ΑΒ στο μέσο του Μ να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα Μ, Ν ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9+2)

ΘΕΜΑ 4

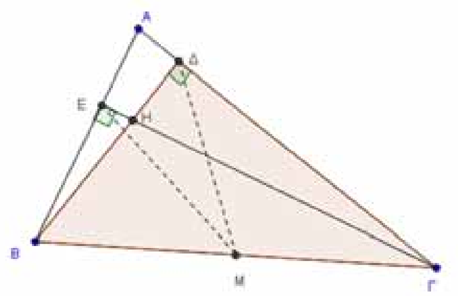
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο σημείο Η και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι

i. ΜΔ=ΜΕ (Μονάδες 10)

ii. Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ και ότι $\hat{\mathrm{AH\Delta}} = \hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ. (Μονάδες 10)



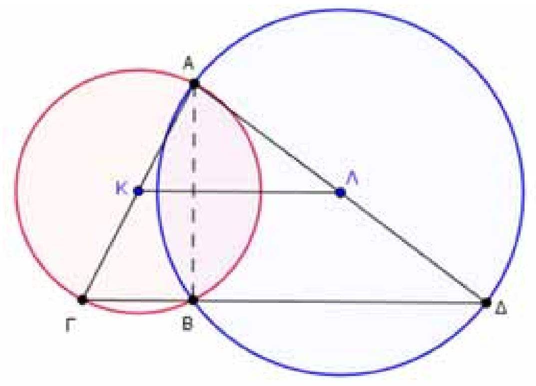
ΘΕΜΑ 4

Δύο κύκλοι (Κ,ρ), (Λ,R) τέμνονται σε δύο σημεία Α, Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\mathrm{AB}\Gamma} = 90^{\circ}$ (Μονάδες 5)

β) τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

γ) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ,Λ,Γ,Δ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)



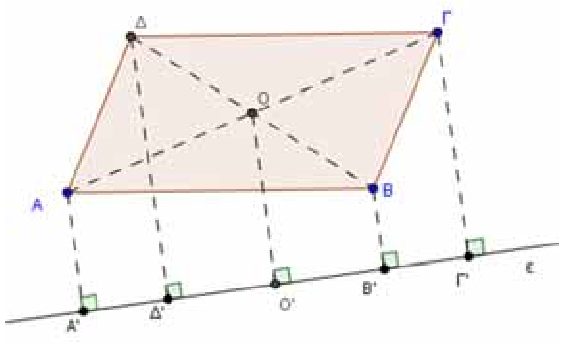
ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις προβολές Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ των κορυφών του Α, Β, Γ, Δ αντίστοιχα, σε μια ευθεία ε.

α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι ΑΑ΄=3, ΒΒ΄=2, ΓΓ΄=5, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4. (Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την απόσταση ΔΔ΄. (Μονάδες 9)



β) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι.

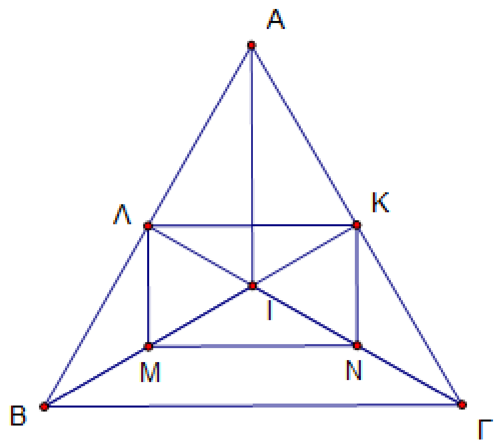
Αν Μ και Ν τα μέσα των ΒΙ και ΓΙ αντίστοιχα, να αποδείξετε:

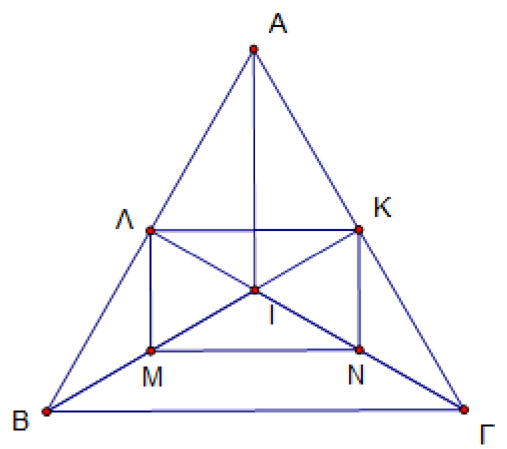
α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές (Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα (Μονάδες 5)

γ) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 5)

δ) Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



Εκφώνηση Δραστηριότητας	Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΒΙ και ΓΙ αντίστοιχα, να αποδείξετε: α. Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές **Μονάδες 5** β. Τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα **Μονάδες 5** γ. Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ. **Μονάδες 5** δ. Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο **Μονάδες 10** 
Ενδεικτική Απάντηση	
ΘΕΜΑ	**4**
ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΑΠΑΙΤΗΣΗ της δραστηριότητας	

ΘΕΜΑ 4

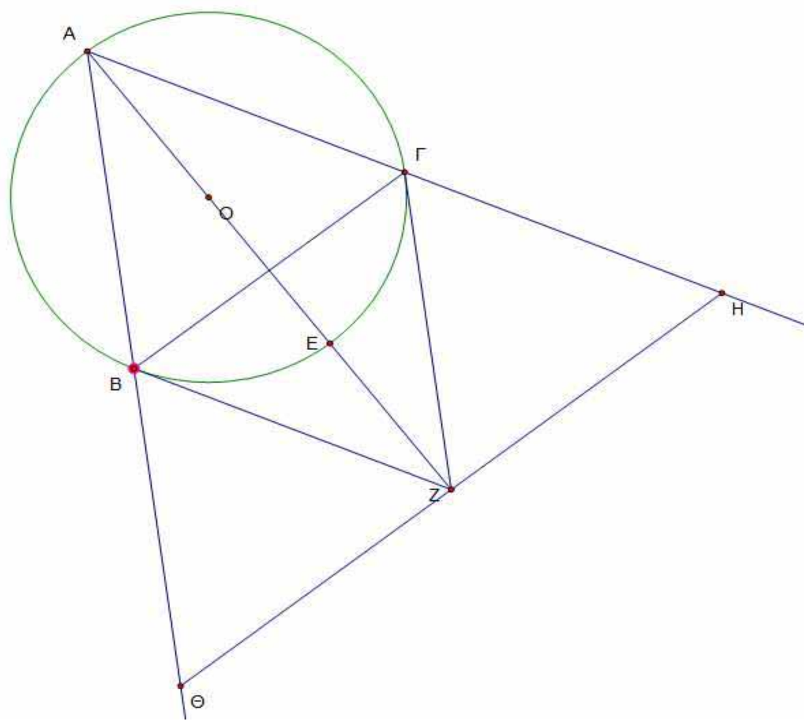
Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Τα τμήματα ΓΖ και ΒΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘΗ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΖ στο Ζ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΑΓΖΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι τραπέζιο, με $\mathrm{B\Theta} = \mathrm{BZ}$ και $\Theta\mathrm{H} = 2\mathrm{B\Gamma}$.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

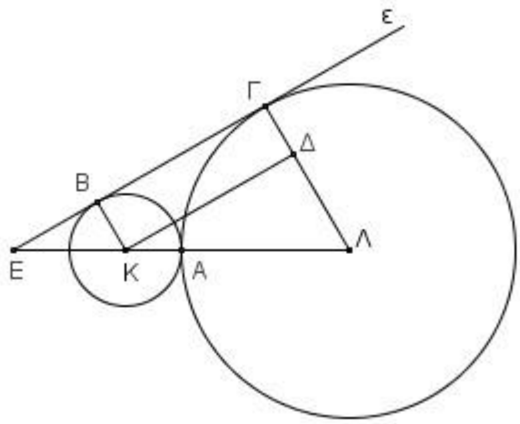
Οι κύκλοι (Κ, ρ) και (Λ, 3ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Μία ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΚΛ είναι $30°$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΕΛ=6ρ, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (Κ, ρ).

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β)Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ. (Μονάδες 6)

δ)Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

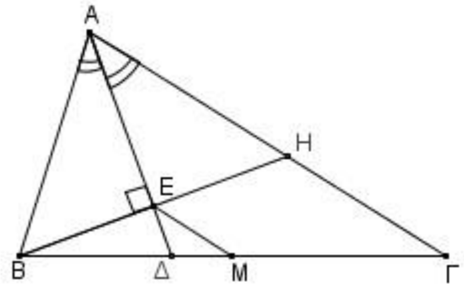
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Η. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) ΕΜ//ΗΓ (Μονάδες 8)

γ) ΕΜ=(ΑΓ-ΑΒ)/2 (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ΑΒΓ τρίγωνο και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση ***Π*** αιτιολογώντας την απάντησή σας

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την ***αντίστροφη*** πρόταση της ***Π*** και να αποδείξετε ότι ισχύει.

(Μονάδες 10)

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση ***Π*** και την ***αντίστροφή της*** ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξεία γωνία $x\hat{O}y$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο, ρ_1) και (Ο, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Οχ στα σημεία Κ, Α και την Οψ στα Λ, Β αντίστοιχα.

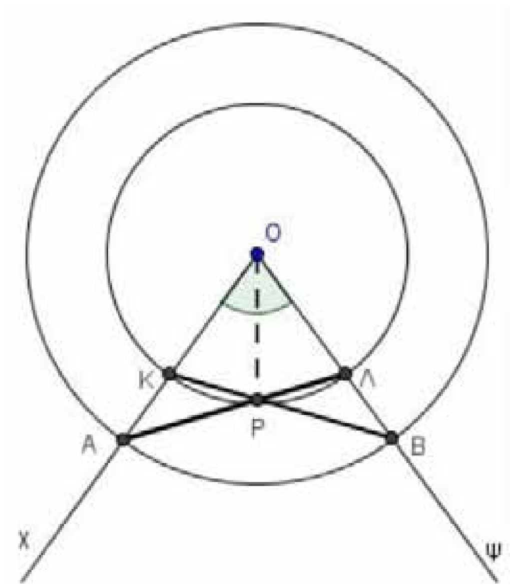
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΛ = ΒΚ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ και ΒΚ.

(Μονάδες 8)

γ) Η ΟΡ διχοτομεί την $x\hat{O}y$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

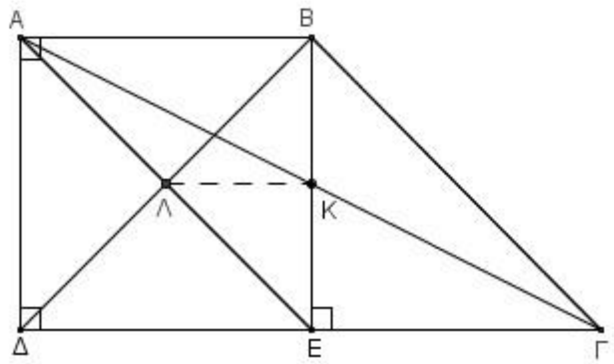
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{\Delta}$=90°, ΔΓ=2ΑΒ και $\hat{B}=3\hat{\Gamma}$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma}$=45° (Μονάδες 8)

β) ΒΔ=ΑΕ (Μονάδες 9)

γ) ΚΛ=$\frac{1}{4}$ΔΓ. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta = \mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$ (Μονάδες 8)

γ) Οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

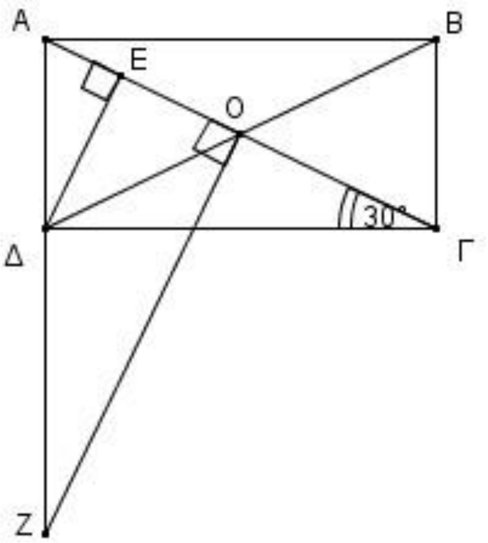
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A} = 30^\circ$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε ΔΕ $\perp$ ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)

β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει ΑΒ>ΑΔ, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Delta = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{Z}}\Gamma$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\widehat{\Delta}$και$\widehat{\mathrm{B}}$.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, ναβρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει ΑΒ>ΑΔ, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε**.** (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

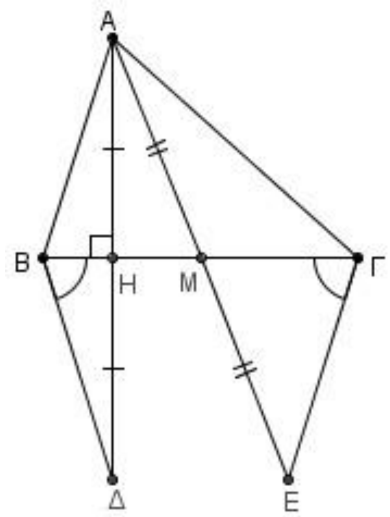
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα ΗΔ=ΑΗ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=ΒΔ=ΓΕ (Μονάδες 8)

β) $\Gamma\hat{B}\Delta = B\hat{\Gamma}E$ (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ε_1, ε_2 δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2, να αποδείξετε ότι:

I. $OM = OM_1$ (Μονάδες 6)

II. Τα σημεία Μ, Ο και M_2 είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

III. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

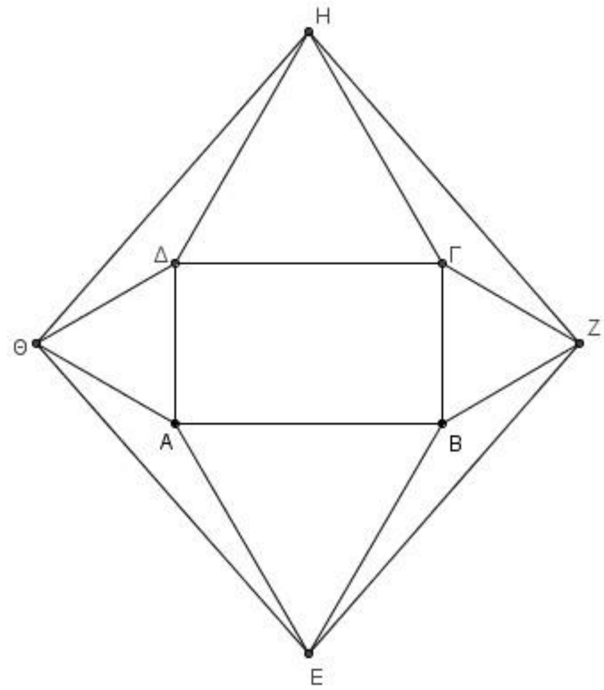
Β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος. (Μονάδες 15)

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε το ΕΖΗΘ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ευθεία (ε) και δυο σημεία Α και Β εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω Α΄ και Β΄ τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).

α) Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Κ , να αποδείξετε ότι το Κ ανήκει και στη μεσοκάθετο του Α΄Β΄. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΒ’Α’ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών ΑΒ και της ευθείας (ε) ώστε το τετράπλευρο ΑΒΒ’Α’ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

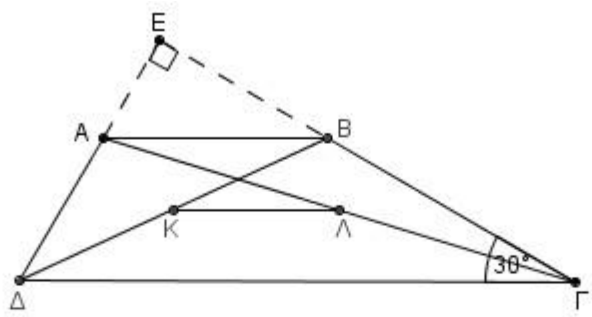
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=2ΑΕ (Μονάδες 10)

β) ΚΛ=ΑΔ (Μονάδες 10)

γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

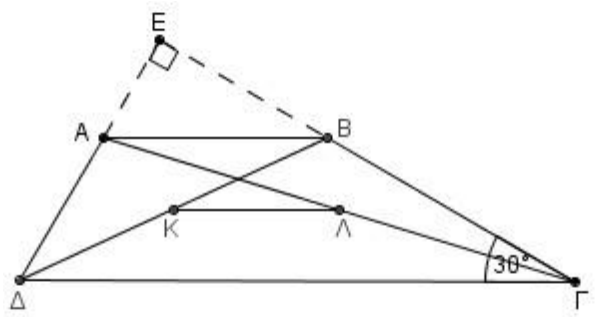
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=2ΑΕ (Μονάδες 10)

β) ΚΛ=ΑΔ (Μονάδες 10)

γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και το ύψος του ΑΗ. Έστω Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

I. ΑΗ=ΑΔ=ΑΕ. (Μονάδες 6)

II. Το τρίγωνο ΕΗΔ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 6)

III. Τα σημεία Ε, Α και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΗΔ είναι ίσα; Αν ναι, να το αποδείξετε. Αν όχι, κάτω από ποιες αρχικές προϋποθέσεις θα μπορούσε να είναι ίσα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

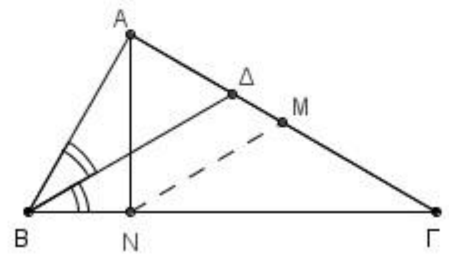
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας $\hat{B}$. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

α) Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) ΑΝ$\perp$ΒΓ (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τα ίσα τόξα ΑΒ και ΑΓ, το καθένα ίσο με 120°. Έστω Δ και Ε τα μέσα των τόξων ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

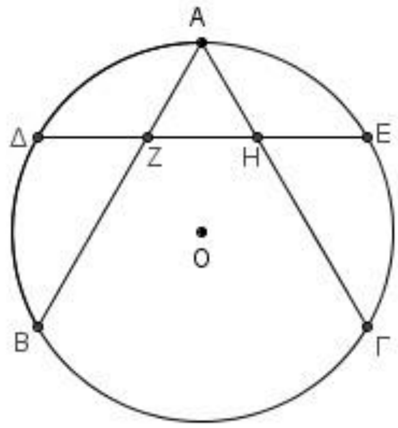
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.

(Μονάδες 10)

γ) Η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 20)

β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ, Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο **Μ στο εσωτερικό του τριγώνου** και Δ, Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.

(Μονάδες 15)

β) Στην περίπτωση που **το σημείο Μ είναι το μέσο** της πλευράς ΒΓ, και Δ, Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Α και Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

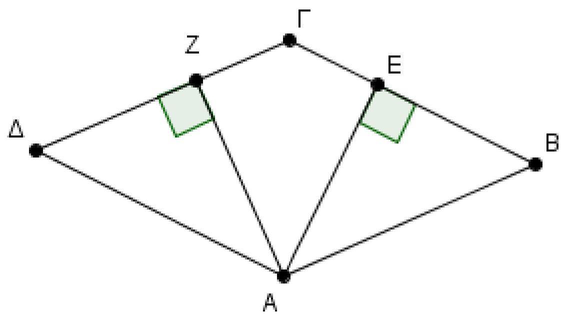
Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΖΕ. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΝΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

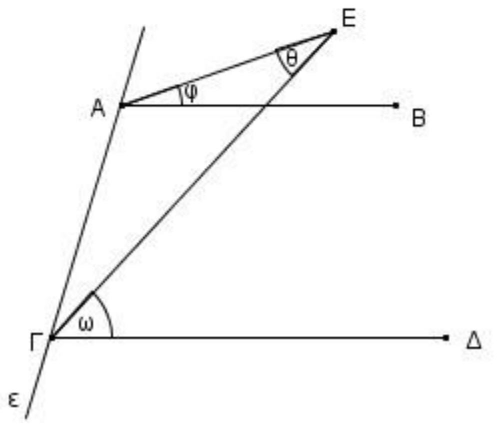


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε.

Να αποδείξετε ότι:

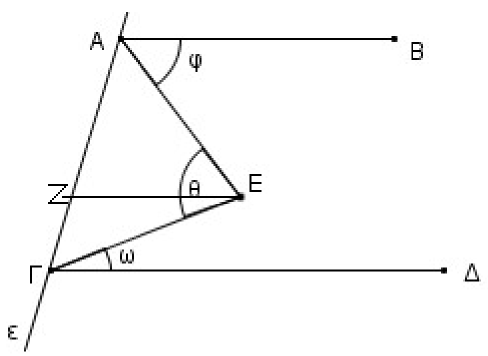
α) Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ τότε: $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$



(Μονάδες 10)

β) Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και ΕΖ//ΑΒ, τότε να αποδείξετε ότι

$\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$



(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4

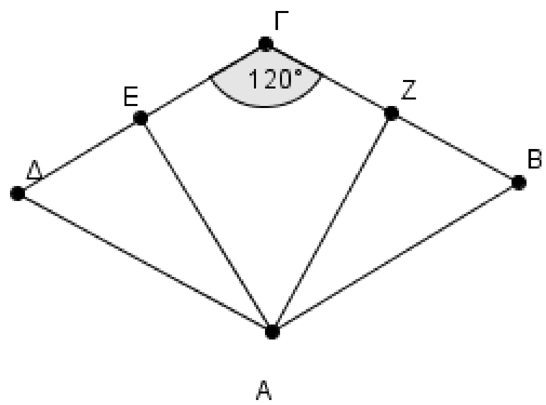
Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\hat{\Gamma} = 120^0$. Έστω ότι ΑΕ και ΑΖ είναι οι αποστάσεις του σημείου Α στις πλευρές ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

ii. $A\Gamma \perp EZ$. (Μονάδες 8)

β) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

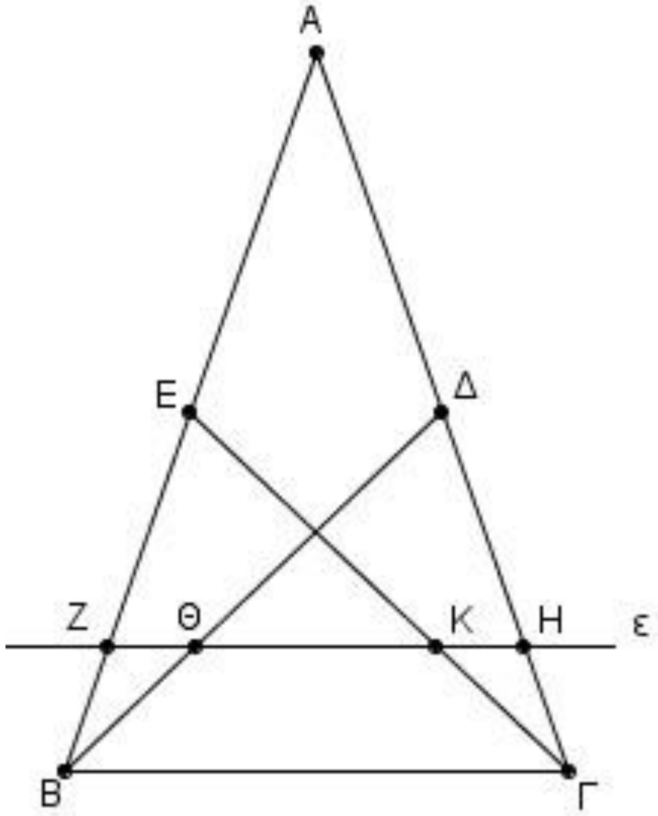
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΖ=ΓΗ. (Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) ΖΚ=ΗΘ . (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

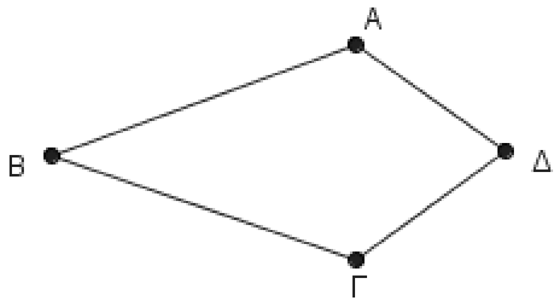
Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Να αποδείξτε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα. (Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

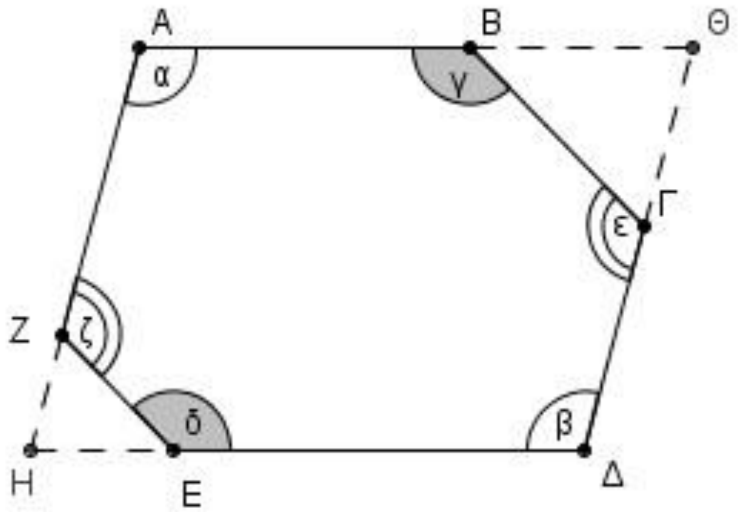
Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\varepsilon}$. (Μονάδες 8)

β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές (Μονάδες 10)

ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δυο ευθείες $ε_1$, $ε_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του E και τέμνει τις $ε_1$ και $ε_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB, να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

ii. ΓΔ= ΑΔ+ΒΓ. (Μονάδες 8)

β) Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΔΓΒ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

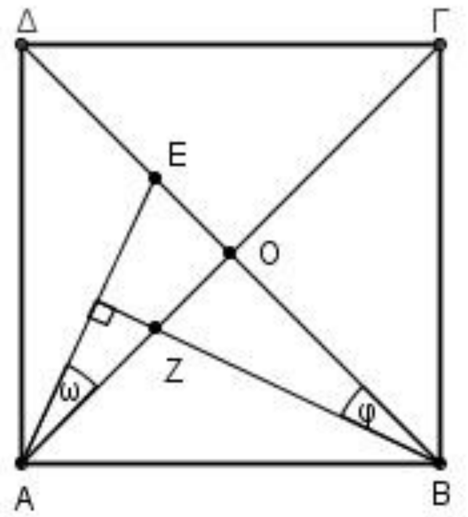
Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΕ, που τέμνει το τμήμα ΑΟ στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και φ του παρακάτω σχήματος είναι ίσες. (Μονάδες 6)

β) ΒΖ=ΑΕ και ΓΖ=ΒΕ (Μονάδες 12)

γ) Το τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στο ΑΒ. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε δυο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ε), τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην (ε) . Έστω Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία (ε).

α) Αν η Α΄Β τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία $\widehat{AOA}'$. **(**Μονάδες 6)

ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε)

(Μονάδες 6)

β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ε), να αποδείξετε ότι:

i. $KA = KA'$ (Μονάδες 6)

ii. $KA + KB > AO + OB$ (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

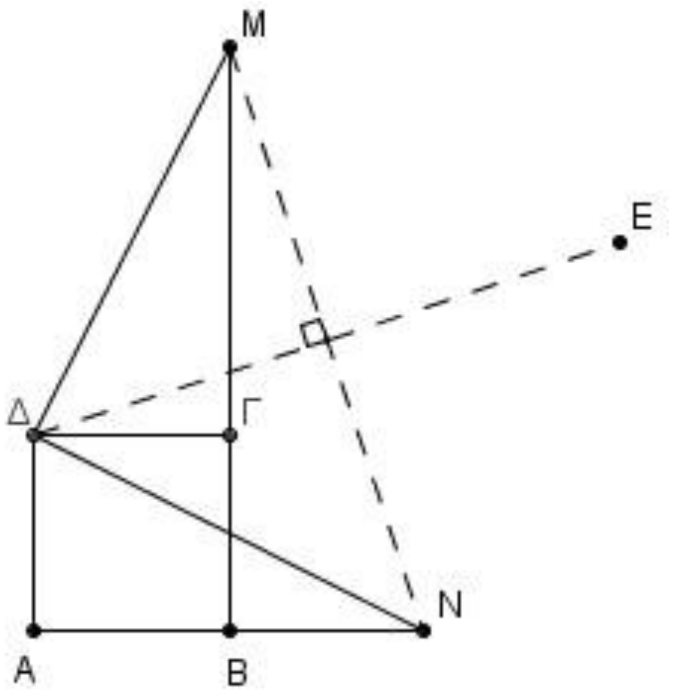
Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΝ=ΑΒ και την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΜ=ΑΝ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΔΝ=ΔΜ (Μονάδες 7)

ii. ΔΝ⊥ΔΜ (Μονάδες 10)

β) Αν Ε το συμμετρικό σημείο του Δ ως προς την ευθεία ΜΝ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΜΕΝ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι ο κύκλος (Ο, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α, Δ και Β.

α) Να αποδείξετε ότι:

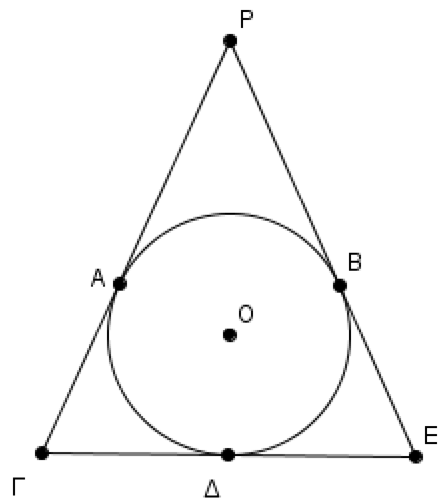
I. $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$ (Μονάδες 6)

II. $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$ (Μονάδες 8)

β) Αν ΑΓ=ΒΕ, να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

II. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ . Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) ΓΑ= ΔΒ. (Μονάδες 8)

γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με ΡΑ + ΡΒ. (Μονάδες 7)

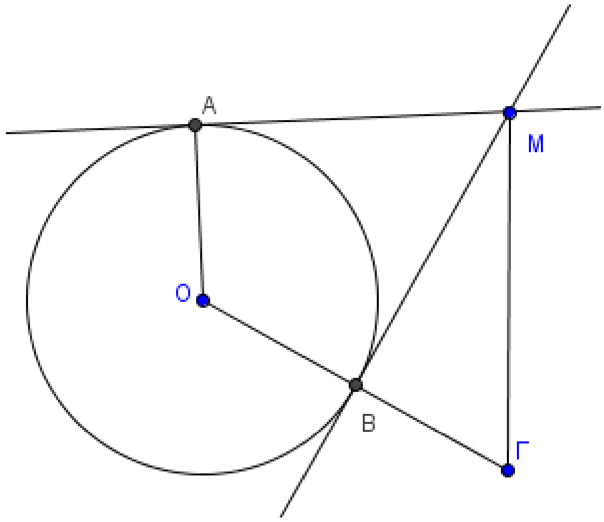
ΘΕΜΑ 4

Από σημείο Μ εξωτερικό κύκλου (Ο,ρ) φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ και ΜΒ του κύκλου. Αν Γ είναι το συμμετρικό σημείο του κέντρου Ο ως προς την ΜΒ, να αποδείξετε ότι:

α) ΜΑ=ΜΒ=ΜΓ (Μονάδες 9)

β) η γωνία $\widehat{AM\Gamma}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\widehat{BM\Gamma}$. (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο ΑΜΒΟ είναι εγγράψιμο σε κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο του κύκλου. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ . Στο ΑΔ θεωρούμε σημείο Η τέτοιο ώστε ΗΑ=ΗΒ. Έστω ότι Ε είναι το σημείο τομής της ΒΗ με την ΑΓ. Φέρνουμε την ΑΖ κάθετη στην ΒΕ, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Θ.

α) Να αποδείξετε ότι:

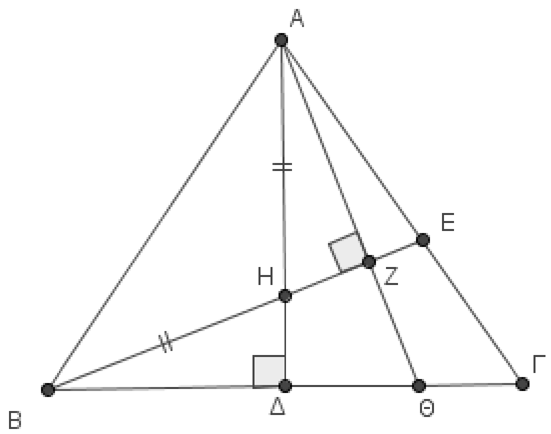
i. Τα τρίγωνα ΗΔΒ και ΗΖΑ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. ΔΘ=ΘΖ. (Μονάδες 6)

iii. Η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 6)

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΗΒ ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι ΑΒ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον είναι γωνία ΒΑΔ=120° και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Έστω Αx η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2}+\hat{B}_{\varepsilon\xi}=180^\circ+\frac{\hat{\Gamma}-\hat{B}}{2}$, όπου $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$ και $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ παριστάνουν τις εξωτερικές γωνίες των $\hat{A}$, $\hat{B}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)

ii. Η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΓΒ (προς το μέρος του Β) σε σημείο Ζ . (Μονάδες 8)

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και $A\hat{Z}B=15^\circ$, να αποδείξετε ότι ΒΓ=2ΑΒ. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ, τέτοιο ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$. Επιπλέον, φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΚ. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες $ε_1$, $ε_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB. Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του E, η οποία τέμνει τις $ε_1$ και $ε_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.

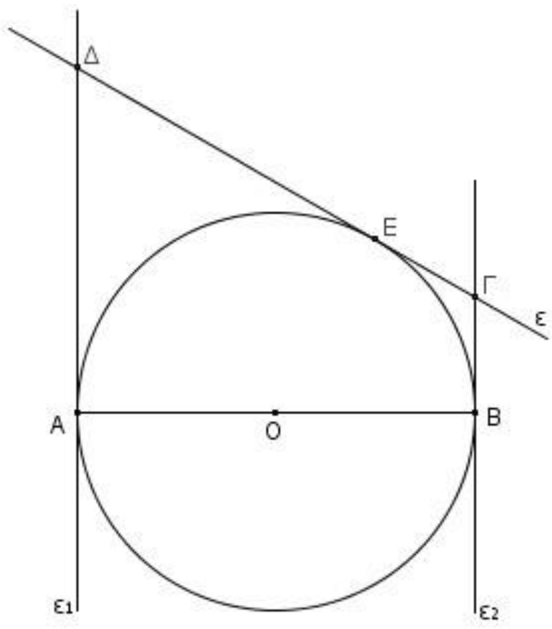
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 6)

ii. ΓΔ= ΑΔ + ΒΓ (Μονάδες 7)

iii. Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) Αν η γωνία ΑΔΕ είναι 60^{o} και η ΟΔ τέμνει τον κύκλο (O, R) στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το Κ είναι μέσο του ΔΟ. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία Α αμβλεία, ισχύει ότι ΑΒ=2ΑΔ. Τα σημεία Ε και Ζ, είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το τμήμα ΗΕ, είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{H}\Gamma$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

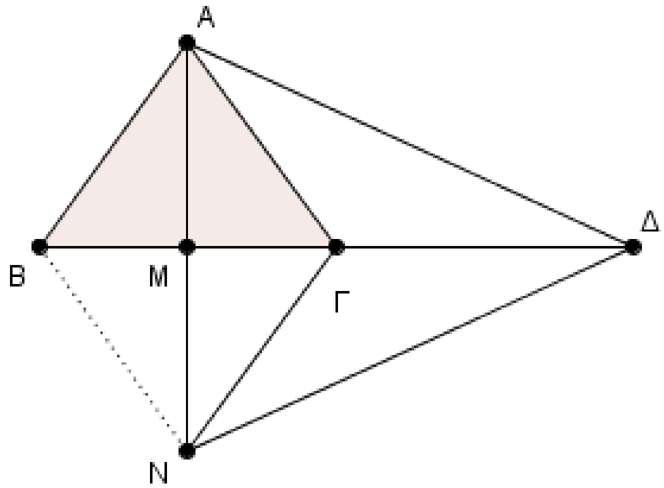
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΜ το ύψος του στην πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση του ΑΜ θεωρούμε τμήμα ΜΝ=ΑΜ . Στην προέκταση του ΒΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα ΓΔ =ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α ίση με 120° και γωνία Β είναι ίση με 45°. Στην προέκταση της ΒΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα ΑΔ = 2ΑΒ. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Κ.

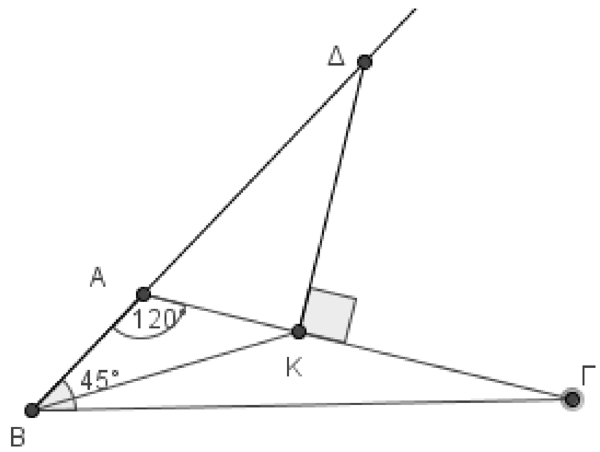
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΑΔΚ είναι ίση με 30°. (Μονάδες 6)

β) Το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

γ) Αν Ζ το μέσο της ΔΑ, τότε $Z\widehat{K}B=90^\circ$. (Μονάδες 6)

δ) Το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Έστω ότι Δ είναι το μέσο της ΑΜ τέτοιο ώστε ΒΔ = $\frac{ΒΓ}{2}$ και γωνία $Α\hat{Δ}Β$ = 120°.

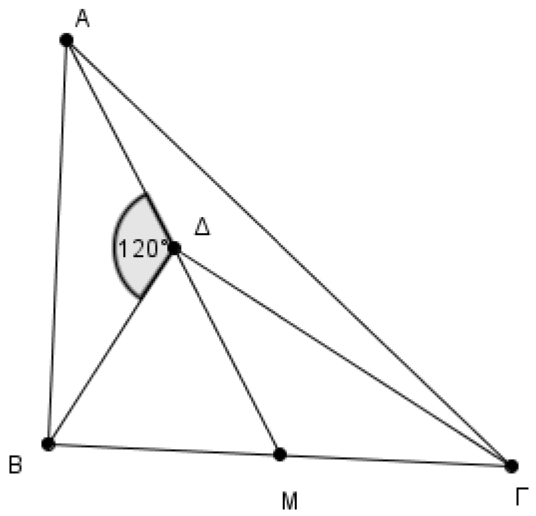
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΜ. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΔΜΓ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

δ) Αν το σημείο Κ είναι η προβολή του Δ στην ΒΓ, να αποδείξετε ότι 2ΜΚ=ΑΔ.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρουμε ΑΕ$\perp$ΒΔ.

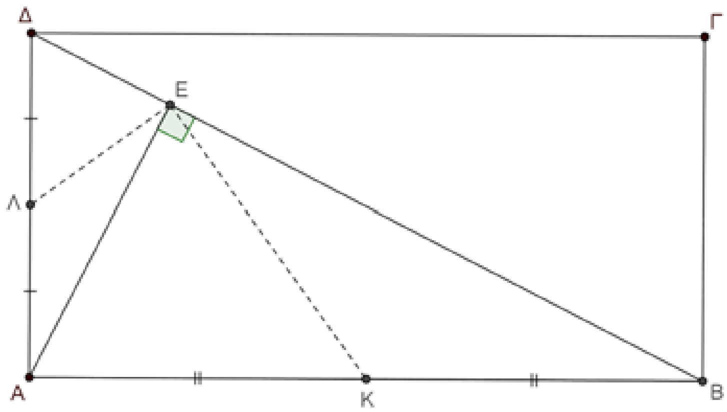
Έστω Κ, Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $K\hat{E}\Lambda = 90^\circ$. (Μονάδες 8)

ii. $K\Lambda = \dfrac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι ΚΛ=ΒΓ. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ΑΒ > ΒΓ, ΑΓ=2ΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΔΑ=ΑΕ.

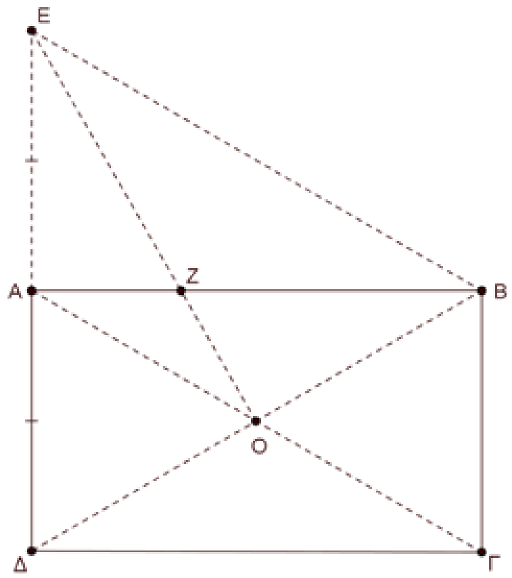
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

β) Αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι ΔΖ⊥ΕΒ.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

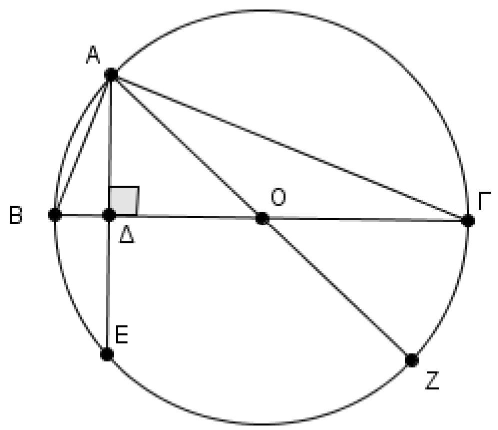
Δίνεται κύκλος (O,R) με διάμετρο ΒΓ. Θεωρούμε σημείο Α του κύκλου και σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Η προέκταση της ΑΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ, η προέκταση του οποίου τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΖΓ=ΑΒ=ΒΕ (Μονάδες 8)

ii. Το τετράπλευρο ΒΕΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

β) Αν $\hat{\Gamma} = 30^{\circ}$, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραπεζίου ΒΕΖΓ είναι ίση με 5R , όπου R η ακτίνα του κύκλου. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

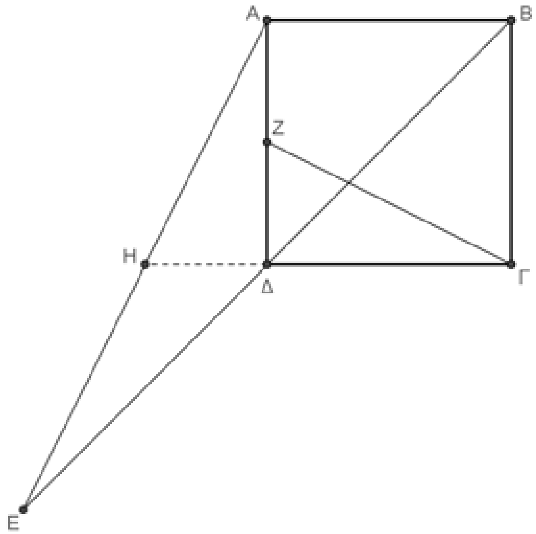
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta H = \frac{AB}{2}$ (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, ΔΓ = 2ΑΒ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ. Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ν.

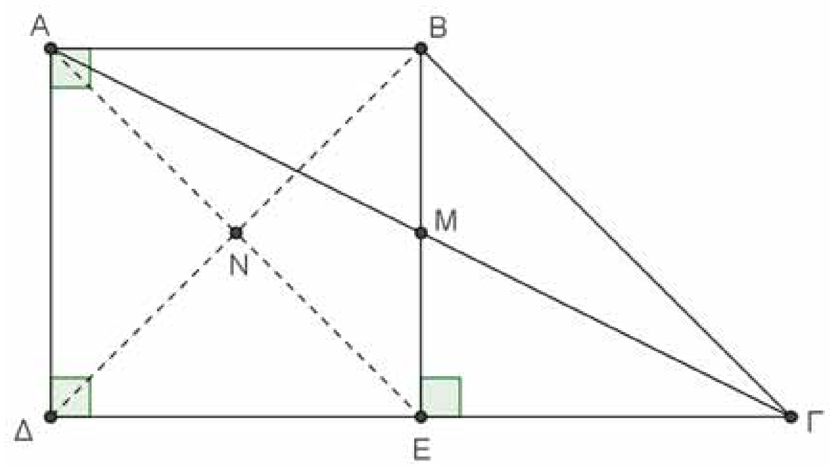
Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

β) $MN = \frac{1}{4}\Gamma\Delta$. (Μονάδες 7)

γ) $AE \perp B\Delta$. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

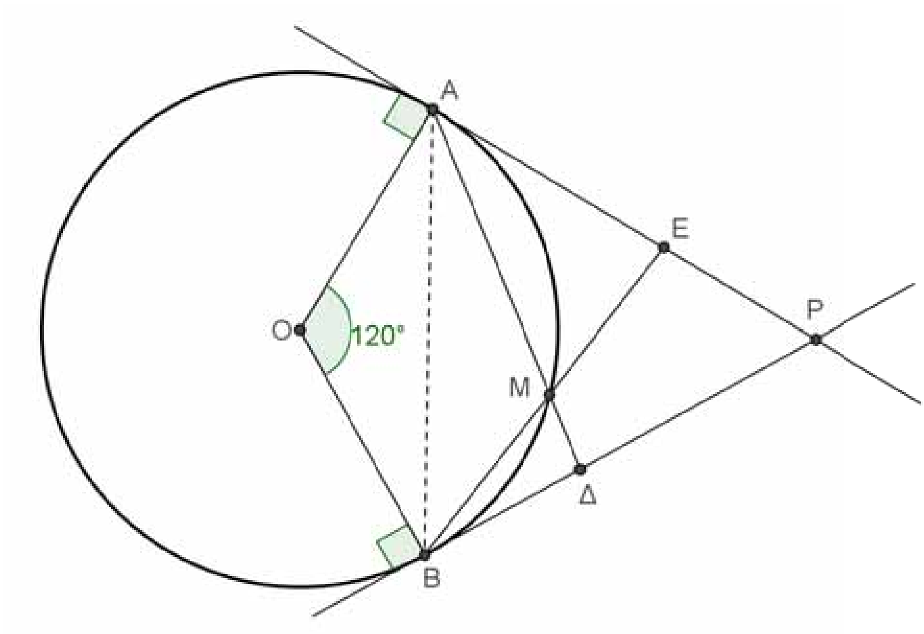
Δίνεται κύκλος (O, R) και μια επίκεντρη γωνία του AOB ίση με 120^0 . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο P. Θεωρούμε σημείο M του τόξου AB και φέρουμε τις χορδές AM και BM, οι οποίες προεκτεινόμενες τέμνουν τις PB και PA και στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) $M\hat{A}B + M\hat{B}A = 60^\circ$. (Μονάδες 8)

γ) Τα τρίγωνα ABΔ και PEΠ είναι ίσα. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

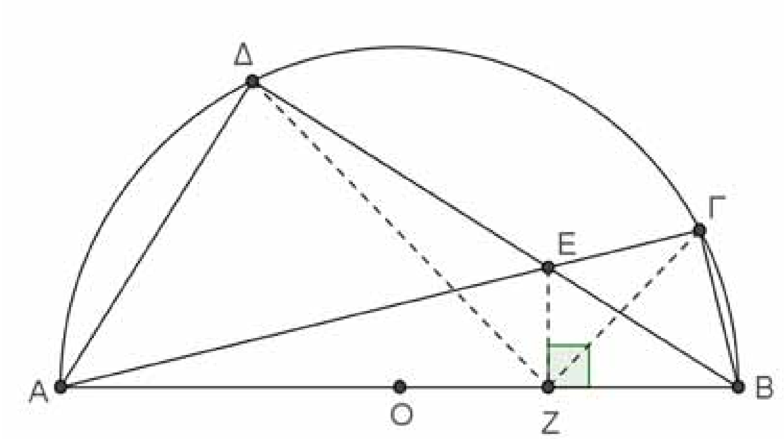
Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο χορδές του ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε. Φέρουμε $EZ \perp AB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ΔΑΓ και ΔΒΓ είναι ίσες (Μονάδες 7)

β) Τα τετράπλευρα ΑΔΕΖ και ΕΖΒΓ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{Z}\Gamma$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

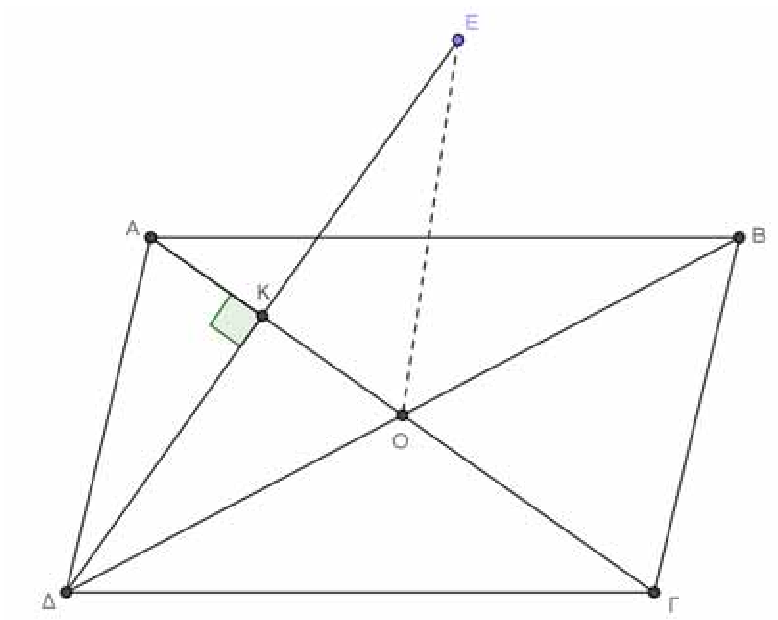
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκτασή του προς το Κ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε ΚΕ= ΔΚ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΕΟ = \frac{ΒΔ}{2}$. (Μονάδες 8)

β) Η γωνία $\hat{ΔΕΒ}$ είναι ορθή. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

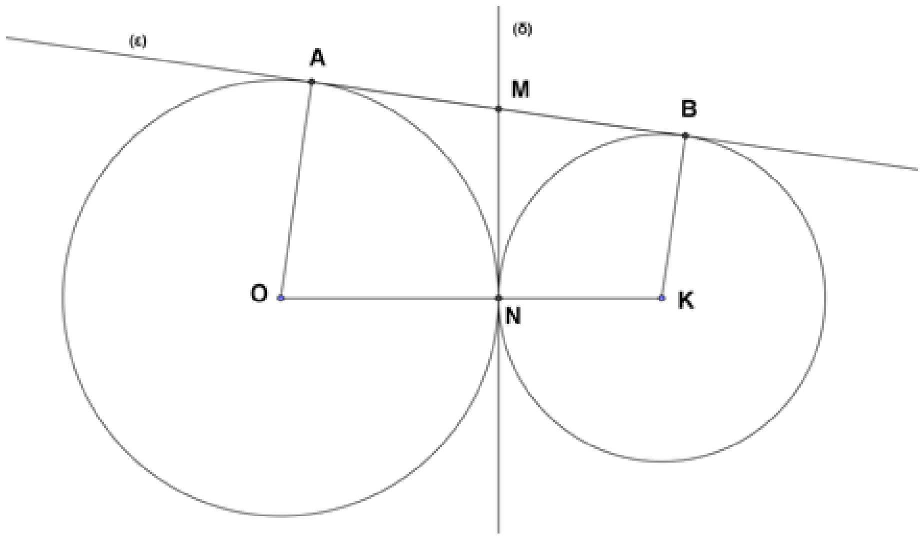
Δύο κύκλοι (Ο, ρ_1), (Κ,ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την (ε) στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το Μ είναι μέσον του ΑΒ. (Μονάδες 7)

β) $O\hat{M}K = 90^0$ (Μονάδες 9)

γ) $A\hat{N}B = 90^0$ (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος (O, ρ) και E το μέσον του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στο κύκλο στο Ε. Οι προεκτάσεις των ΟΒ, ΟΓ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι :

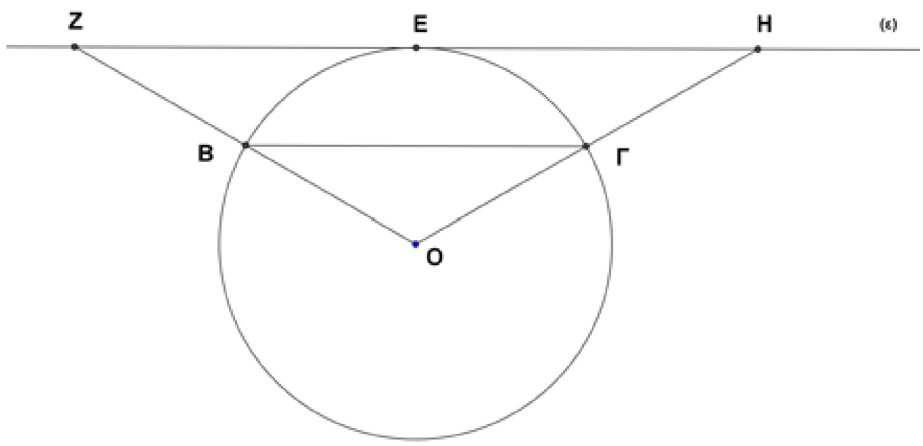
α) ΒΓ//ΖΗ (Μονάδες 5)

β) ΟΖ=ΟΗ (Μονάδες 5)

γ) Αν Β μέσον της ΟΖ

i. να αποδείξετε ότι $B\hat{E}Z = \frac{Z\hat{O}H}{4}$ (Μονάδες 8)

ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΟΗ. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

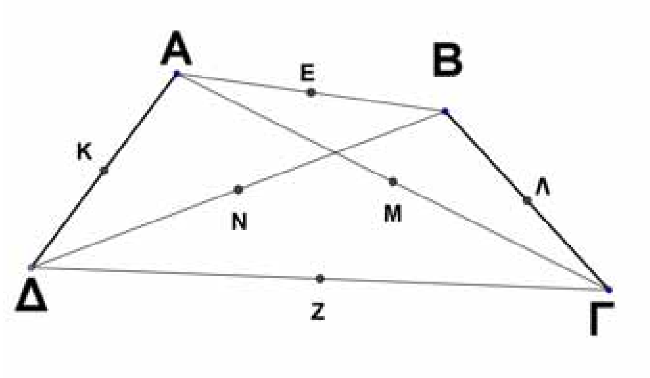
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΔ=ΒΓ. Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΝ. (Μονάδες 7)

γ) ΚΕ=ΖΛ (Μονάδες 5)

δ) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ, ΜΝ, ΕΖ διέρχονται από ίδιο σημείο. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

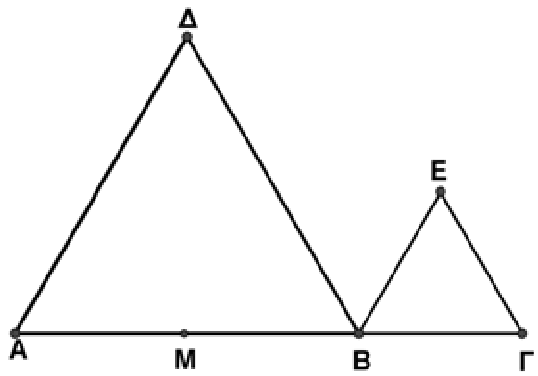
Έστω Α, Β, Γ συνευθειακά σημεία με ΑΒ=2ΒΓ. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο (ΑΔ//ΒΕ). (Μονάδες 9)

β) Τα τρίγωνα ΔΜΒ, ΔΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΔΜΒΕ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

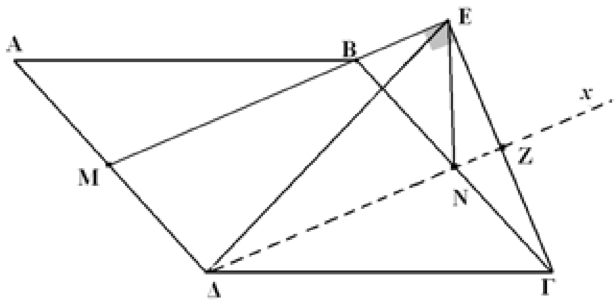
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ (ΓΕ $\perp$ ΜΒ) . Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ (Δx // ΜΒ) τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν , Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 9)

γ) ΔΕ=ΔΓ. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΓΔ. Ονομάζουμε Ζ το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΔ, ΓΕ.

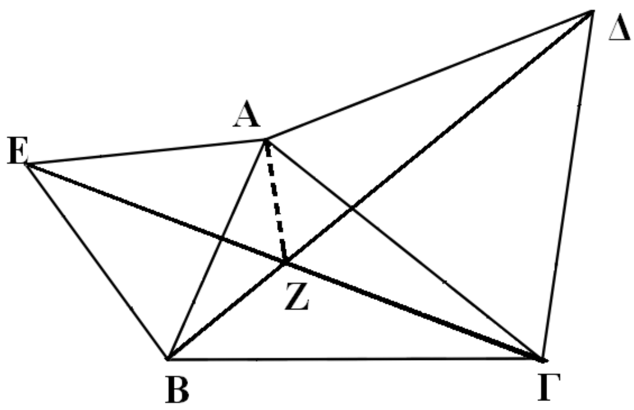
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών

(Μονάδες 10)

β) Τα τετράπλευρα ΑΖΓΔ, ΑΖΒΕ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 10)

γ) Η γωνία $B\hat{Z}\Gamma$ είναι 120^0 . (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ ,ΓΖ, τα ύψη από τις κορυφές Β, Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται ταΜ, Ν, Κ, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΗ, ΒΗ αντίστοιχα.

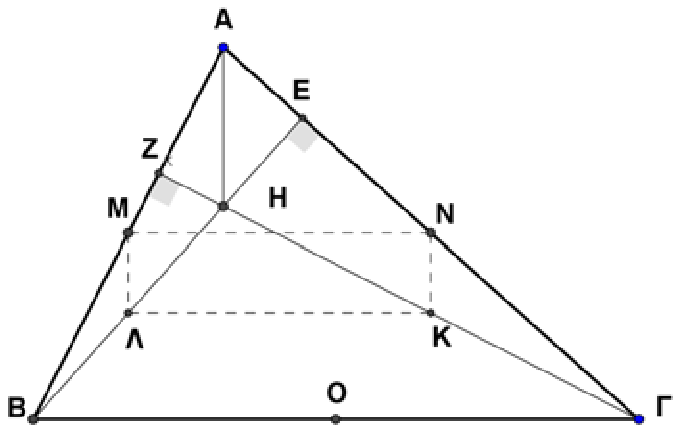
α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΜΝ=ΛΚ (Μονάδες 6)

ii. ΝΚ=ΜΛ=$\frac{ΑΗ}{2}$ (Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν το Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι το $M\hat{O}K = 90^0$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y = 90^0$ και Α,Β σημεία των ημιευθειών Οy, Οx, με ΟΑ=ΟΒ. Η (ε) είναι ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Ο και αφήνει τις ημιευθείες Οx, Οy στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο Α στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο Β στην (ε) την τέμνει στο Ε.

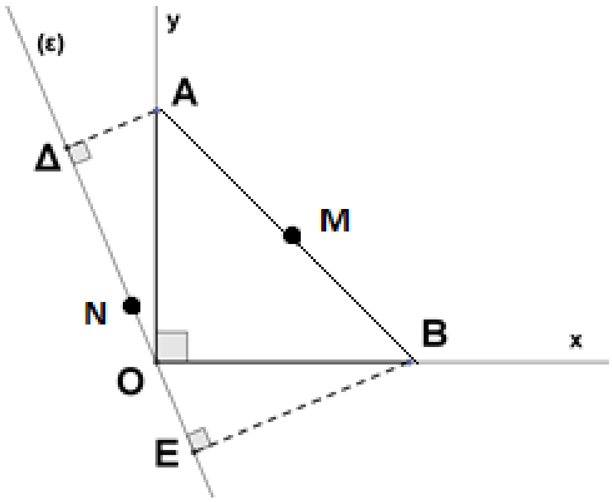
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) ΑΔ+ΒΕ=ΔΕ. (Μονάδες 7)

γ) $MN = \frac{ΔΕ}{2}$, όπου ΜΝ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των ΔΕ και ΑΒ. (Μονάδες 7)

δ) Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. (Μονάδες 4)



ΘΕΜΑ 4

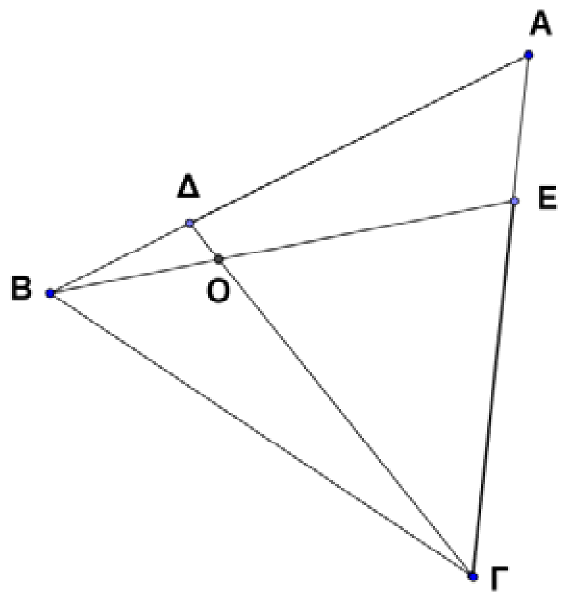
Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε να είναι ΑΔ=ΓΕ. Έστω Ο το σημείο τομής των ΓΔ και ΒΕ.

α) Να αποδείξτε ότι:

i. $B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$. (Μονάδες 10)

ii. $B\hat{O}\Gamma = 120^0$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΕΟΔ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΔΒ. Έστω Μ το μέσο της ΑΔ και Ν το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΔ.

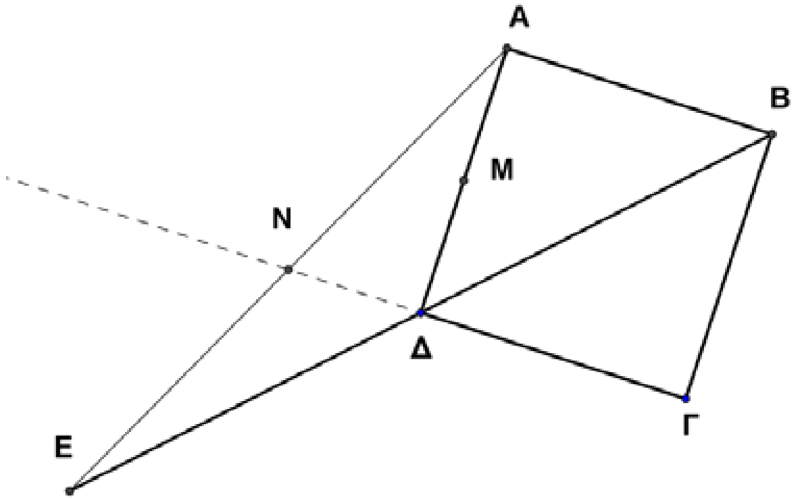
α) Να αποδείξετε ότι ΔΝ=ΔΜ. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΝΜΑ. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΜΝ \perp ΑΓ$ (Μονάδες 5)

ii. $ΓΜ \perp ΑΝ$ (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

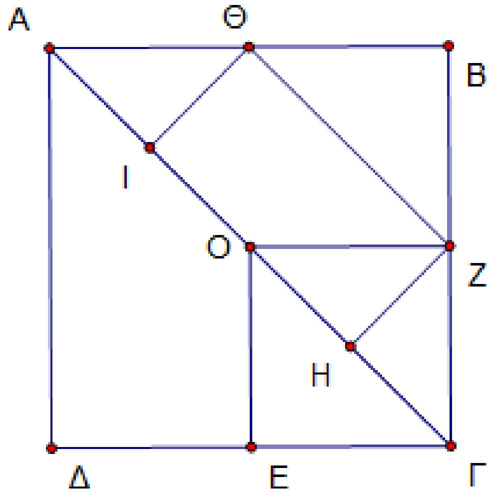
Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι, Ο, Η ώστε $\text{AI} = \text{IO} = \text{OH} = \text{H}\Gamma$. Αν Ε, Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 7)

β) $\text{ZH} = \frac{\text{A}\Gamma}{4}$. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με $\Theta\text{Z} = 2\Theta\text{I}$.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$), τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Έστω Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

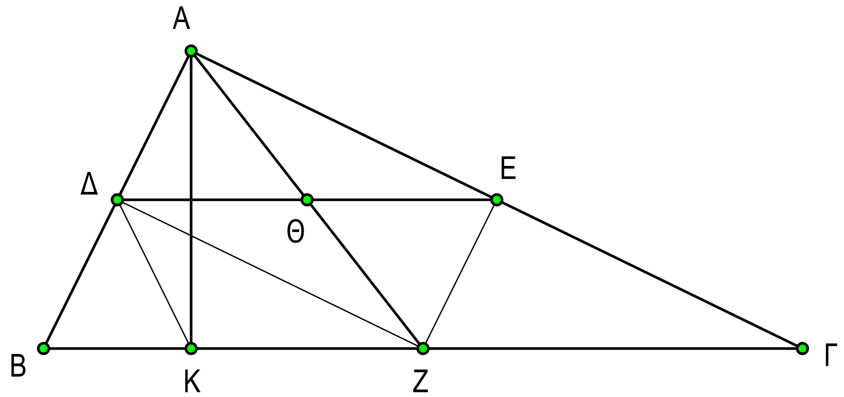
i. Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

ii. $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον είναι γωνία $\hat{\Gamma}$ =30°,

i. να βρείτε τη γωνία $A\hat{Z}B$. (Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$. (Μονάδες 5)



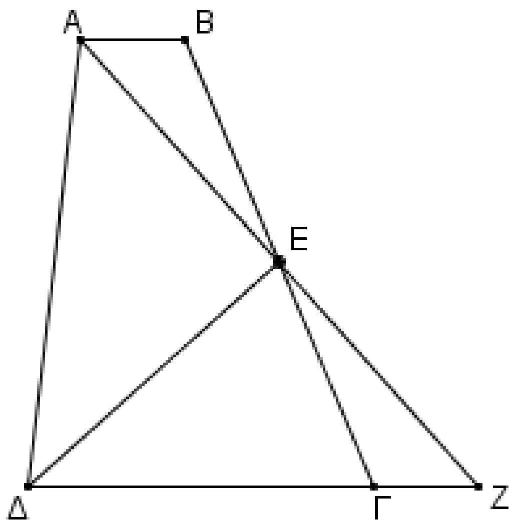
ΘΕΜΑ 4

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) ισχύει ΑΒ+ΓΔ=ΑΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΔΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το Ε είναι το μέσο της ΒΓ (Μονάδες 10)

γ) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπεζίου. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

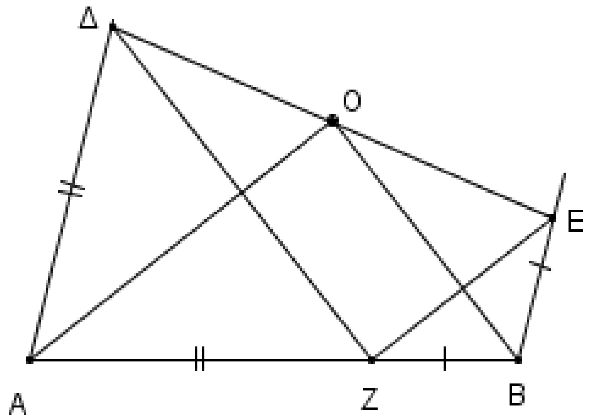
Δίνεται τραπέζιο ΑΔΕΒ, με ΑΔ//ΒΕ, στο οποίο ισχύει ότι ΑΒ=ΑΔ+ΒΕ, και Ο το μέσον της ΔΕ. Θεωρούμε σημείο Ζ στην ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΖ=ΑΔ και ΒΖ=ΒΕ .

Αν γωνία $\Delta\hat{A}Z = \varphi$,

α) να εκφράσετε τη γωνία ΑΖΔ σε συνάρτηση με τη φ. (Μονάδες 8)

β) να εκφράσετε τη γωνία ΕΖΒ σε συνάρτηση με τη φ. (Μονάδες 8)

γ) να αποδείξετε ότι οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

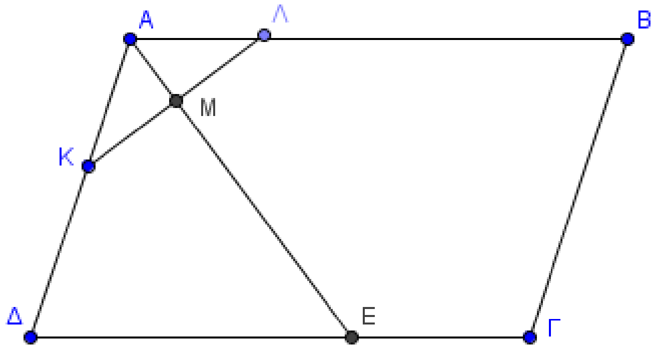
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με ΑΒ > ΑΔ. Θεωρούμε σημεία Κ, Λ, των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε ΑΚ = ΑΛ. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ =ΔΕ. (Μονάδες 8)

β) ΒΓ + ΓΕ = ΑΒ. (Μονάδες 10)

γ) $\hat{B} = 2 \cdot A\hat{\Lambda}K$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2 ΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην ευθεία ΒΓ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$. (Μονάδες 8)

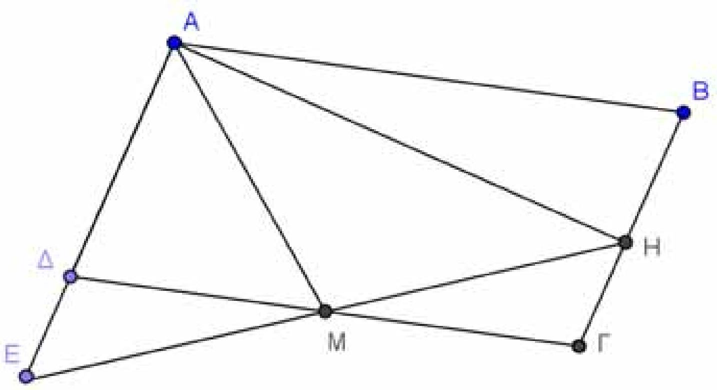
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2 ΒΓ, τη γωνία Α αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ . Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ. (Μονάδες 9)

β) Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

γ) $\hat{E} = \Delta\hat{M}A$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

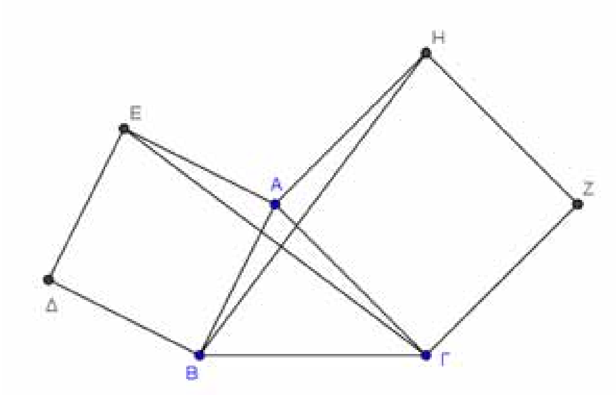
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{E\hat{A}H = A\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B}$ (Μονάδες 8)

β) ΕΓ = ΒΗ (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΓ είναι κάθετη στη ΒΗ. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

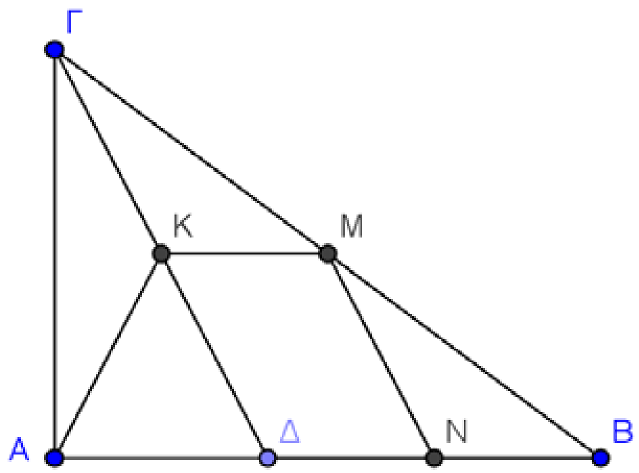
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή, και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ, Μ, Ν τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$. (Μονάδες 8)



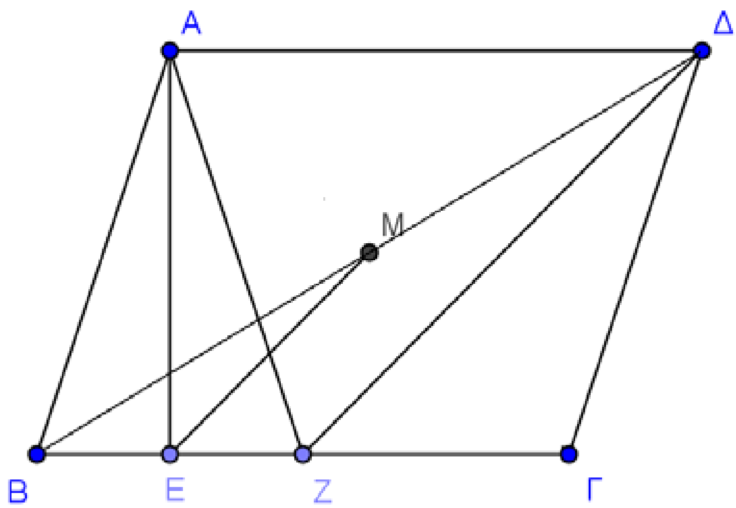
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με 70^{o} και το ύψος του ΑΕ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε ΒΕ = ΕΖ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΖΓΔ (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι ΕΜ = $\frac{ΑΓ}{2}$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

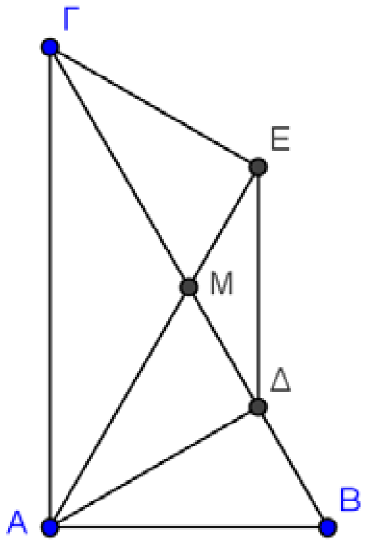
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ. Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ, η οποία την τέμνει στο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) ΜΕ=ΜΔ=ΒΓ/4 (Μονάδες 9)

γ) Το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

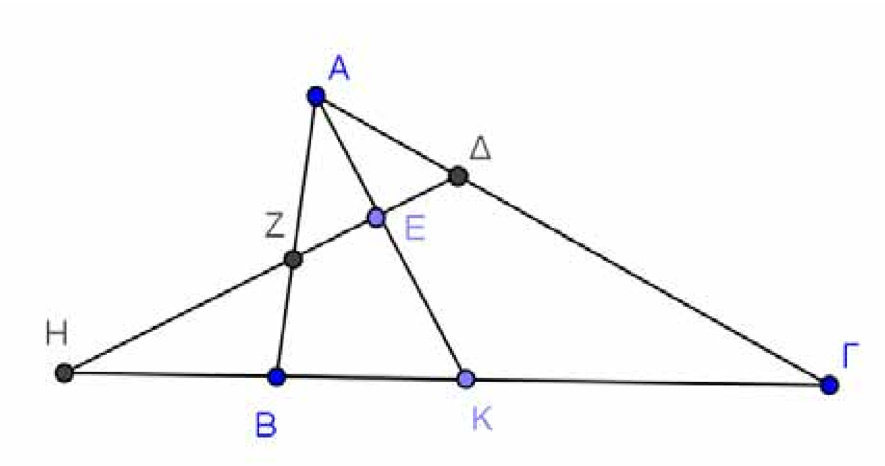
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) $Z\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$. (Μονάδες 7)

β) ΖΚ = ΚΔ. (Μονάδες 8)

γ) $Z\hat{H}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 10)



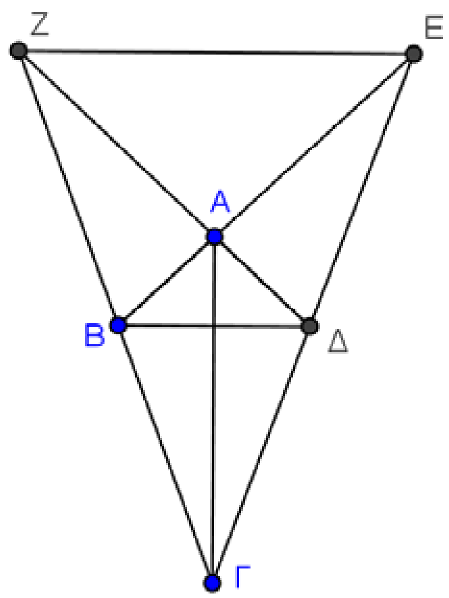
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΑΔ και ΓΒ = ΓΔ. Αν Ε το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ να αποδείξετε ότι:

α) Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ. (Μονάδες 7)

β) ΓΖ = ΓΕ (Μονάδες 9)

γ) ΕΖ // ΒΔ (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

α) Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 15)

β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

(Μονάδες 10)

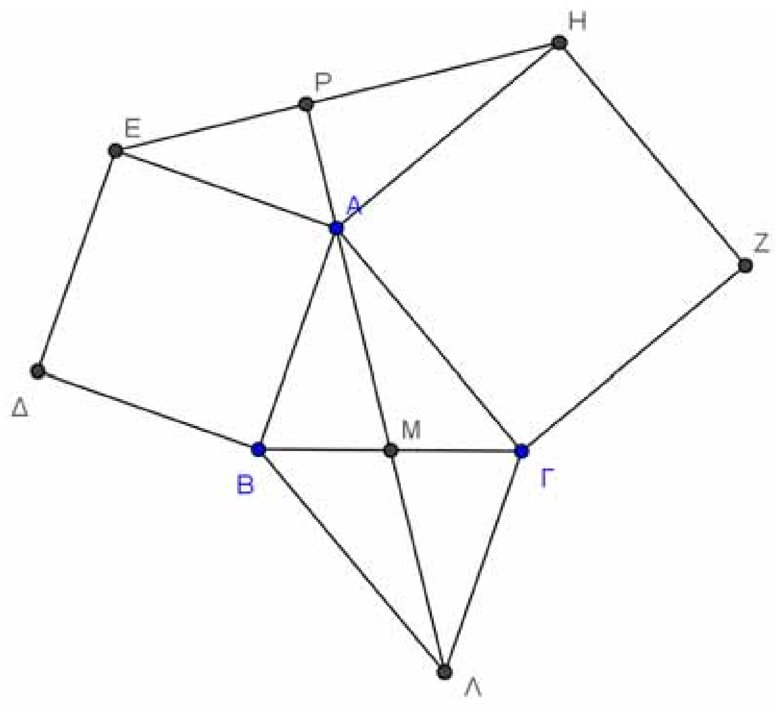
ΘΕΜΑ 4

Εκτός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ το μέσο του ΒΓ και Λ σημείο στην προέκταση της ΑΜ τέτοιο ώστε ΑΜ = ΜΛ, να αποδείξετε ότι:

α) ΓΛ = ΑΕ. (Μονάδες 10)

β) Οι γωνίες ΑΓΛ και ΕΑΗ είναι ίσες. (Μονάδες 10)

γ) Η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ. (Μονάδες 5)



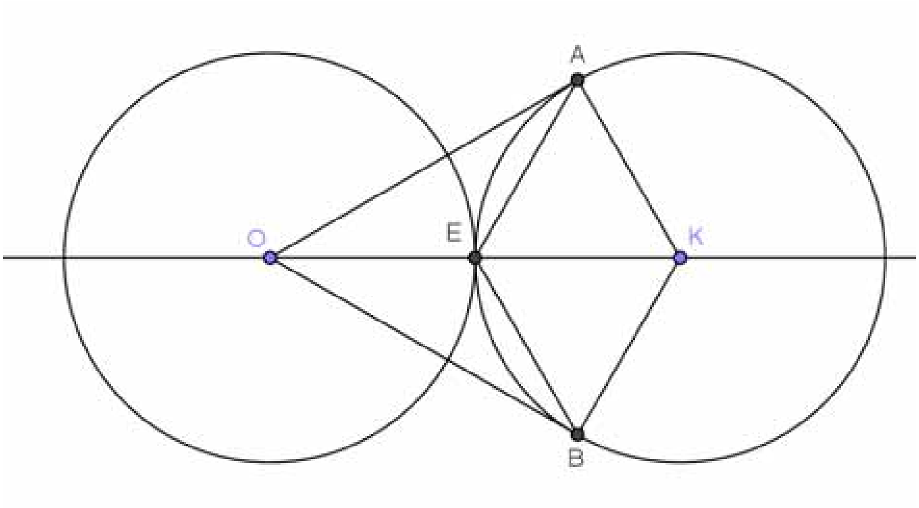
ΘΕΜΑ 4

Δυο ίσοι κύκλοι (Ο, ρ) και (Κ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (Κ,ρ) να αποδείξετε ότι:

α) ΑΕ = ΒΕ. (Μονάδες 9)

β) $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{K} = 30^o$. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

α) Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)

β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

(Μονάδες12)

ΘΕΜΑ 4

α) Σε ρόμβο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του.

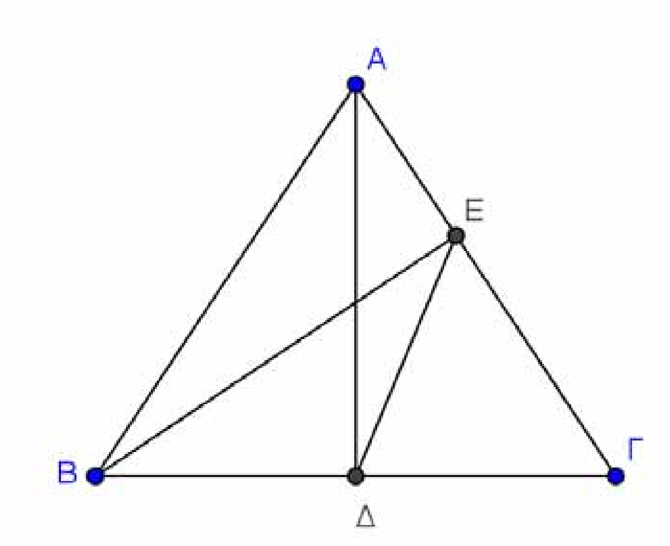
Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ =2 ΕΔ. (Μονάδες 6)

β) $B\hat{E}\Delta = \frac{\hat{A}}{2}$. (Μονάδες 7)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) $A\hat{B}E = A\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

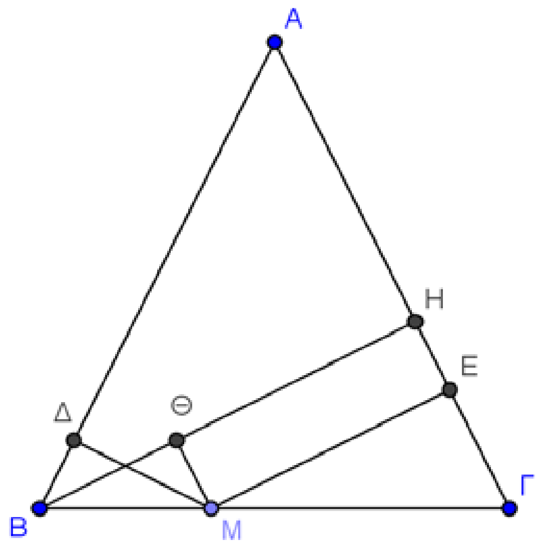
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ , τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του ΒΗ. Από το Μ φέρουμε κάθετες ΜΔ, ΜΕ και ΜΘ στις ΑΒ, ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) ΒΘ = ΔΜ (Μονάδες 9)

γ) Το άθροισμα ΜΔ+ΜΕ=ΒΗ. (Μονάδες 7)



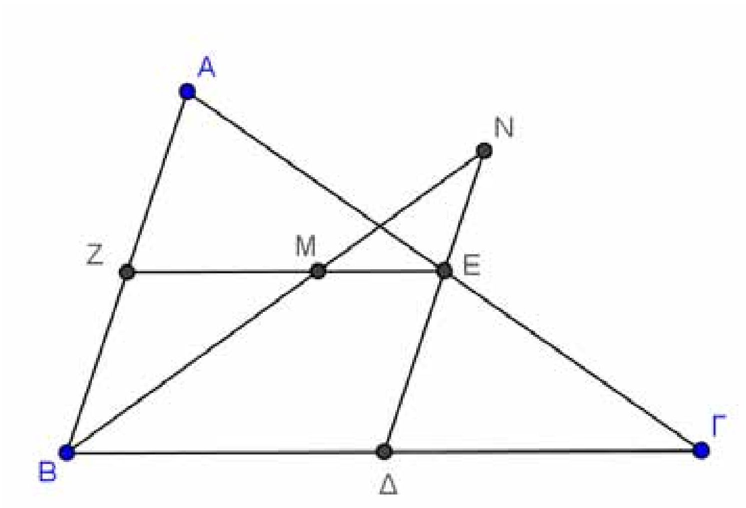
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΑΒ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΖΕ στο σημείο Μ και την προέκταση της ΔΕ στο σημείο Ν, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Τα τρίγωνα ΒΖΜ και ΜΕΝ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 10)

γ) ΒΖ + ΝΕ =ΔΓ (Μονάδες 8)



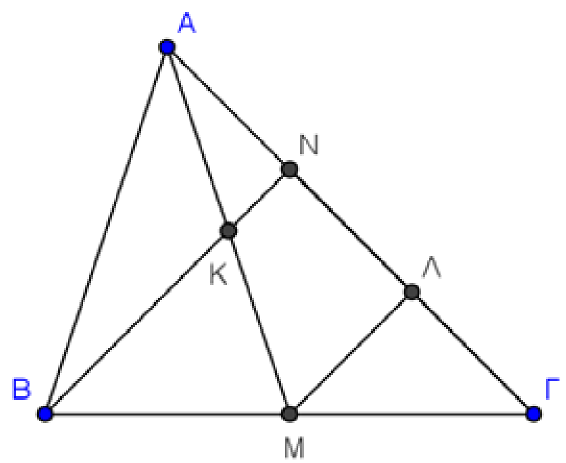
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ διάμεσός του και Κ το μέσο του ΑΜ. Αν η προέκταση της ΒΚ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν, και Λ είναι το μέσο του ΓΝ, να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Ν είναι μέσο του ΑΛ. (Μονάδες 9)

β) $\mathrm{K}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = \mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K} + \mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{N}$ (Μονάδες 9)

γ) ΒΚ = 3ΚΝ (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

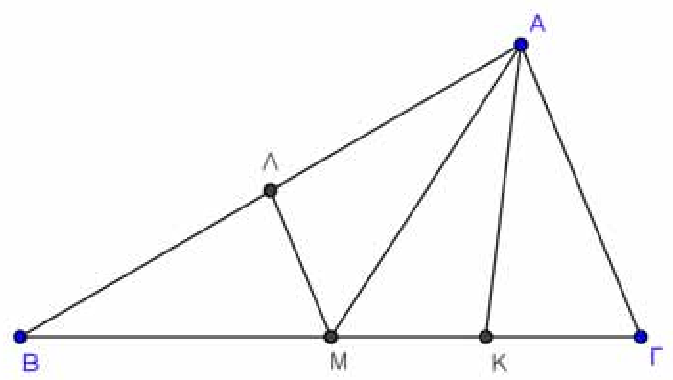
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΓ. Έστω ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ και Κ, Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$. (Μονάδες 7)

β) ΜΛ = ΜΚ. (Μονάδες 9)

γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Lambda\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K}$. (Μονάδες 9)

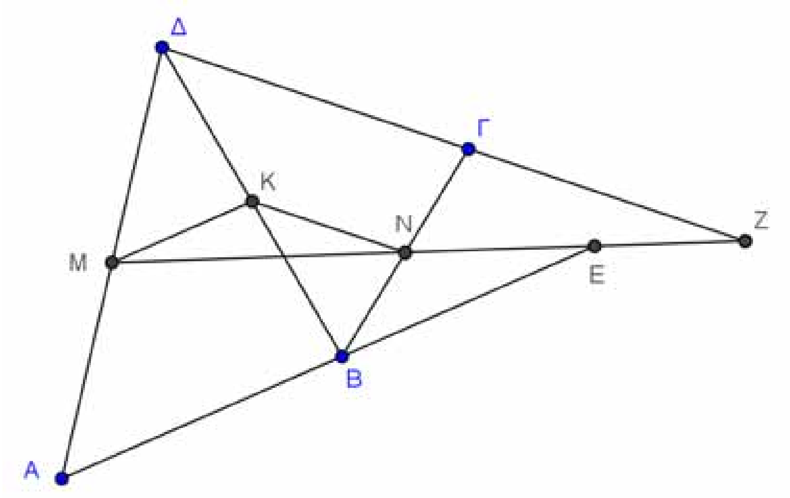


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΓΔ και Μ, Ν, Κ τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΔΓ τέμνουν την προέκταση της ΜΝ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) ΜΚ = ΚΝ. (Μονάδες 13)

β) $\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{Z}}\Delta$. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ = ΔΓ ενώ στην προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}$. (Μονάδες 10)

ii. τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

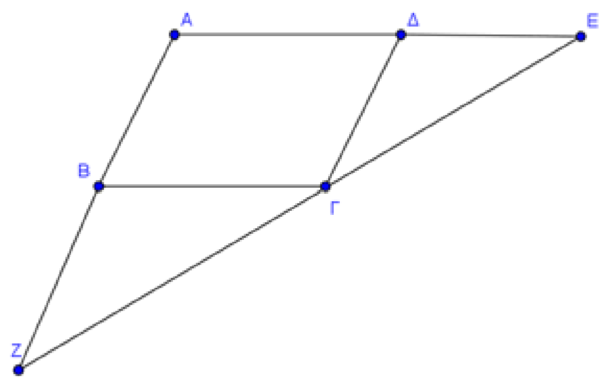
β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. « Έχουμε:

$\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ (ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΖΕ) και

$\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ).

Όμως $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} + \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E} + \Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 180^o$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα: $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} + \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta + \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 180^o$. Οπότε τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή. Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M}$. (Μονάδες 8)

β) $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{H} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{H}$. (Μονάδες 9)

γ) Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ

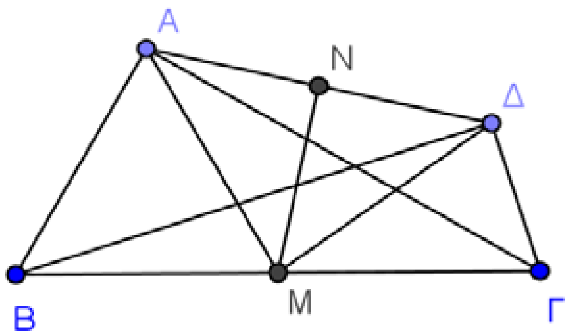
Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ με $\hat{A} = 90^o$, $\hat{\Delta} = 90^o$ και Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ και ΑΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ = ΜΔ. (Μονάδες 10)

β) Η ΜΝ είναι κάθετη στην ΑΔ. (Μονάδες 10)

γ) $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο Λ ώστε ΕΛ = ΑΕ και στην προέκταση της ΕΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο ώστε ΔΚ = ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΚΔ = ΛΕ. (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια. (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο, με διάμετρο ΒΓ. Από σημείο Α του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$.

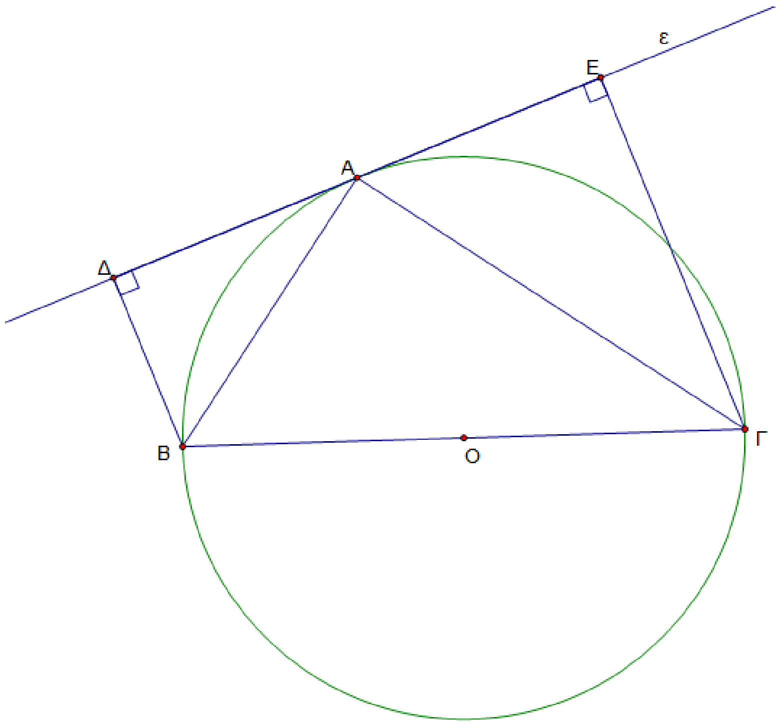
Από τα σημεία Β και Γ φέρουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στην ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι ΒΑ και ΓΑ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\Delta\overset{\wedge}{\mathrm{B}}\Gamma$ και $\mathrm{E}\overset{\wedge}{\Gamma}\mathrm{B}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Αν ΑΖ είναι ύψος του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE} = \mathrm{AZ}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\Delta} + \mathrm{\Gamma E} = \mathrm{B\Gamma}$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από το μέσο Μ του ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο με το ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο με το ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

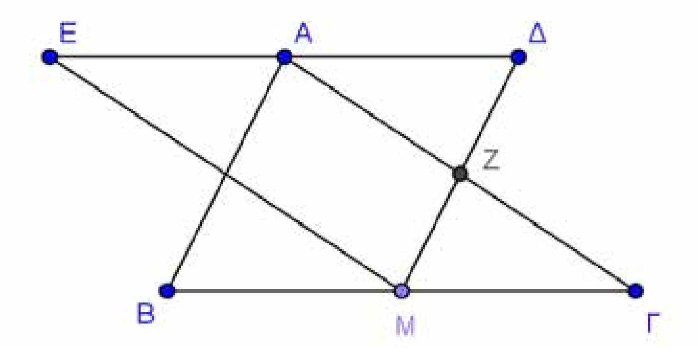
γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά στους μαθητές του, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

(εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΑΖ)

$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΔΕ)

Όμως (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} + \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma + \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = 180^0$. Οπότε Δ,Ε,Α συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή; (Μονάδες 6)



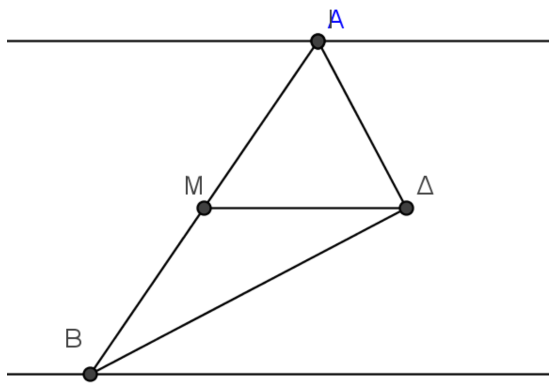
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ), και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΔΑ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) $B\hat{M}\Delta = 2 \cdot M\hat{\Delta}A$ (Μονάδες 8)

γ) ΜΔ // ε (Μονάδες 8)

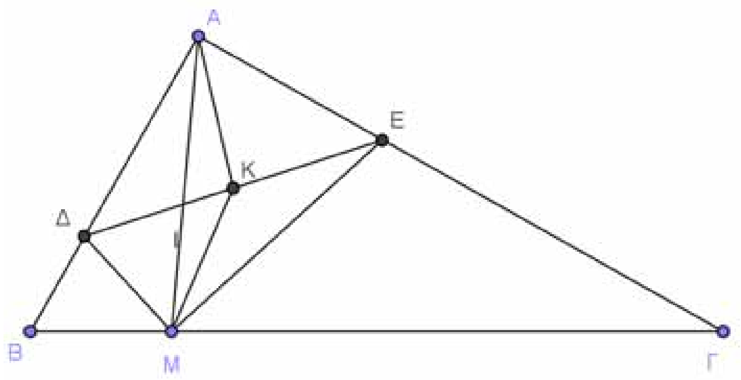


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών ΒΜΑ και ΑΜΓ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι, η γωνία ΔΜΕ είναι ορθή. (Μονάδες 12)

β) Αν Κ το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι ΜΚ = ΚΑ (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και ΑΜ η διάμεσός του. Από το Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν, Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $N\hat{K}M = N\hat{M}K$ (Μονάδες 7)

β) Η ΜΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΝΜΑ. (Μονάδες 9)

γ) ΑΜ = ΚΝ + ΛΡ. (Μονάδες 9)

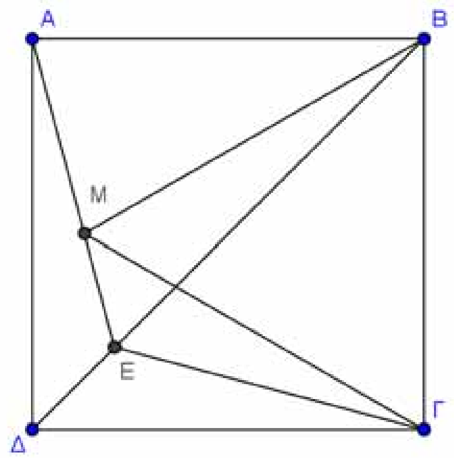
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 15^{o}$. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ. (Μονάδες 9)



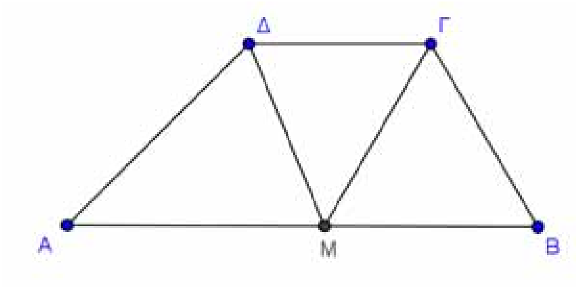
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ = ΑΔ + ΒΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπεζίου. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ.

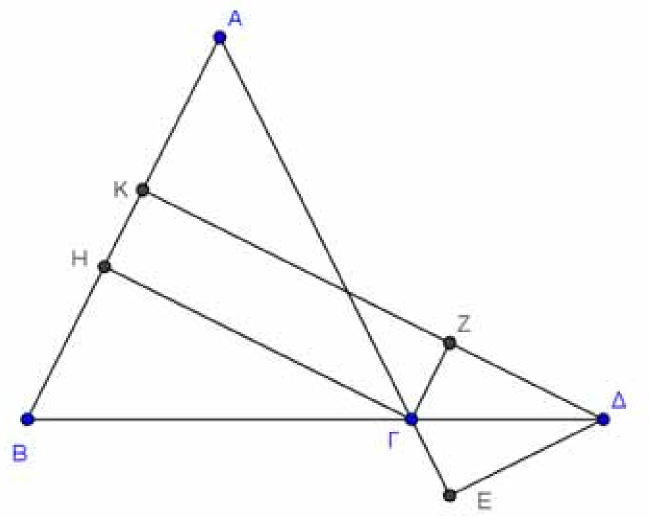
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη γωνία Β. (Μονάδες 4)

β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ. (Μονάδες 4)

γ) Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

δ) ΔΚ – ΔΕ = ΗΓ (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α (Δ, Ε σημεία της ευθείας ΒΓ). Φέρουμε ΒΖ κάθετη στην ΑΔ και ΒΗ κάθετη στην ΑΕ και θεωρούμε Μ το μέσο του ΔΓ.

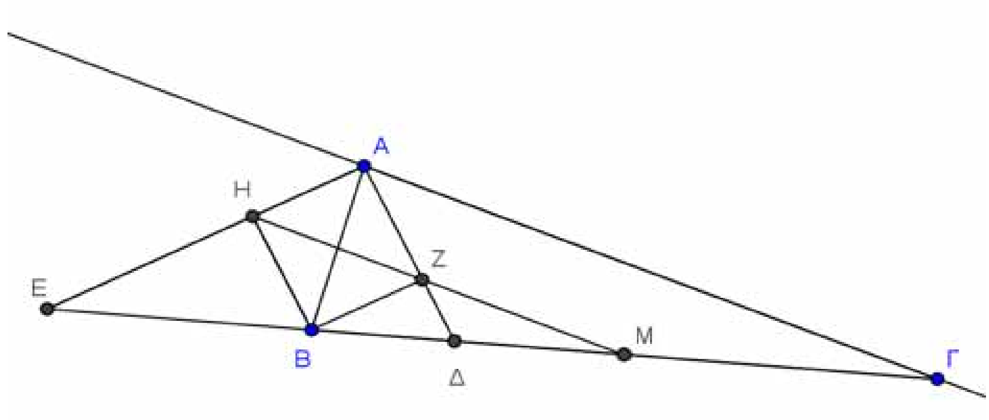
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΖΒΗ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

β) Η γωνία ΗΖΑ είναι ίση με τη γωνία ΖΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Η ευθεία ΗΖ διέρχεται από το Μ. (Μονάδες 6)

δ) $\mathrm{MH} = \dfrac{\mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α (Δ, Ε σημεία της ευθείας ΒΓ). Φέρουμε ΒΖ κάθετη στην ΑΔ και ΒΗ κάθετη στην ΑΕ και θεωρούμε Μ το μέσο του ΔΓ.

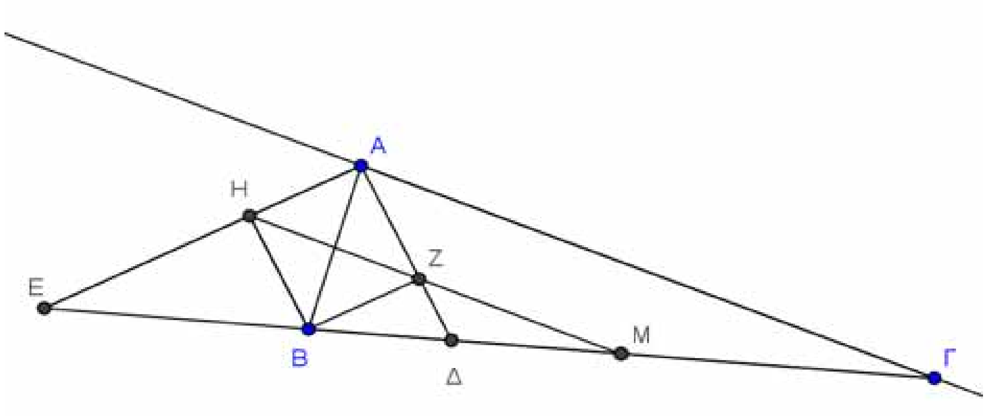
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΖΒΗ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

β) Η γωνία ΗΖΑ είναι ίση με τη γωνία ΖΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Η ευθεία ΗΖ διέρχεται από το Μ. (Μονάδες 6)

δ) $\mathrm{MH} = \dfrac{\mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

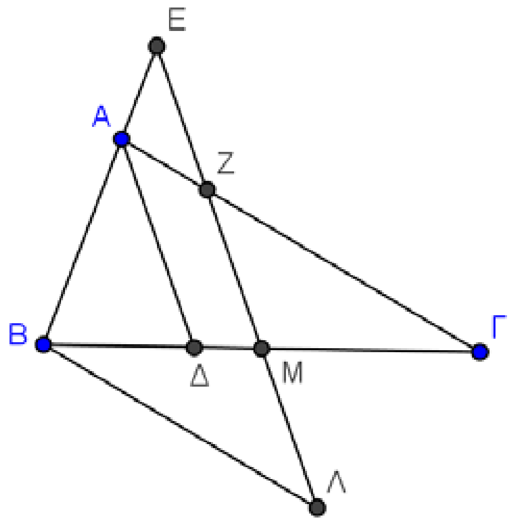
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και ευθεία (ε) παράλληλη από το Β προς την ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ, την ευθεία (ε) στο σημείο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) ΒΛ =ΓΖ . (Μονάδες 9)

γ) ΑΕ=ΑΓ-ΒΛ. (Μονάδες 8)



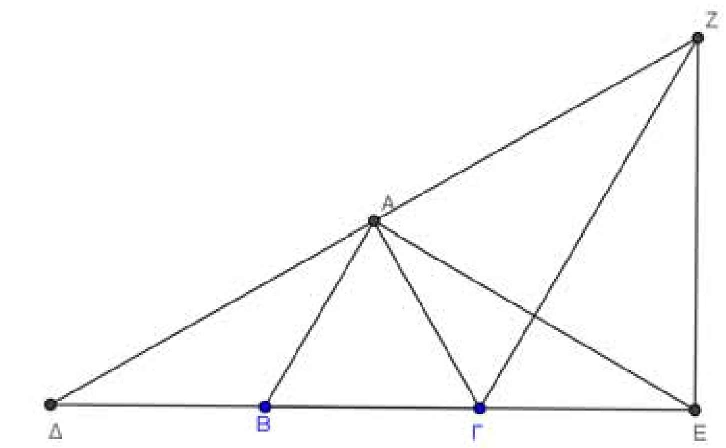
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ = ΒΓ, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ = ΒΓ. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ε, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ. (Μονάδες 12)

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΒ//ΓΖ. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

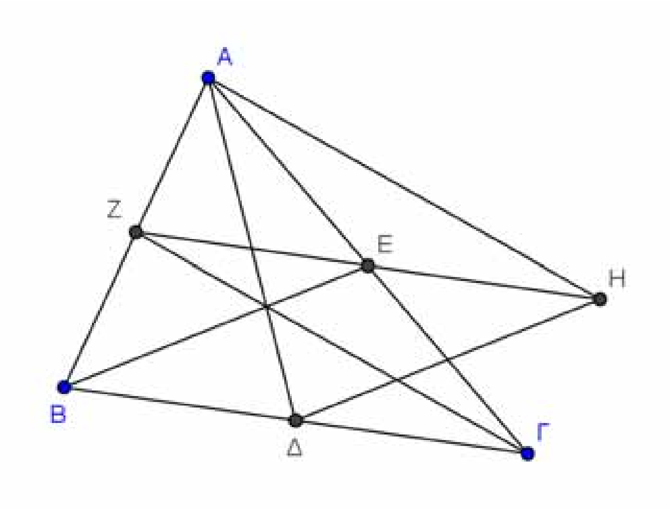
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΖΕ (προς το Ε) κατά τμήμα ΕΗ = ΖΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΑΔΗ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

γ) Οι ευθείες ΒΕ και ΔΗ τριχοτομούν το τμήμα ΖΓ. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

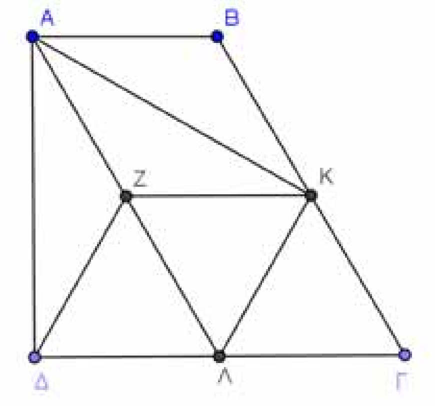
Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ ($\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Delta} = 90^o$) με ΒΓ = ΓΔ = 2ΑΒ και Κ, Λ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ. Η παράλληλη από το Κ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΛ στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ = 2 ΔΖ. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΖΚΓΛ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) $\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\Lambda = 90^o$. (Μονάδες 8)



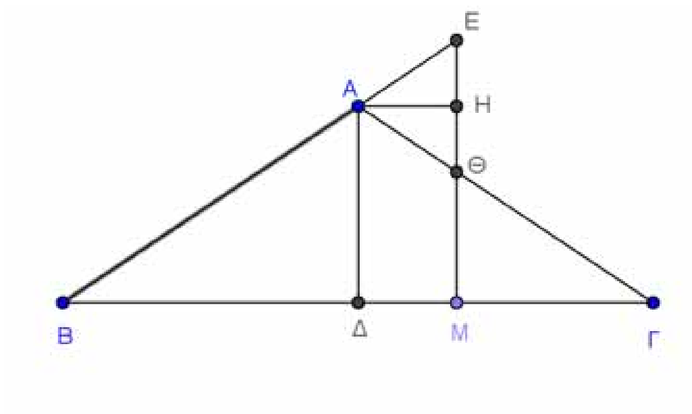
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το σημείο Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{A}H = 90^o$. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) ΜΘ+ΜΕ = 2ΑΔ. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

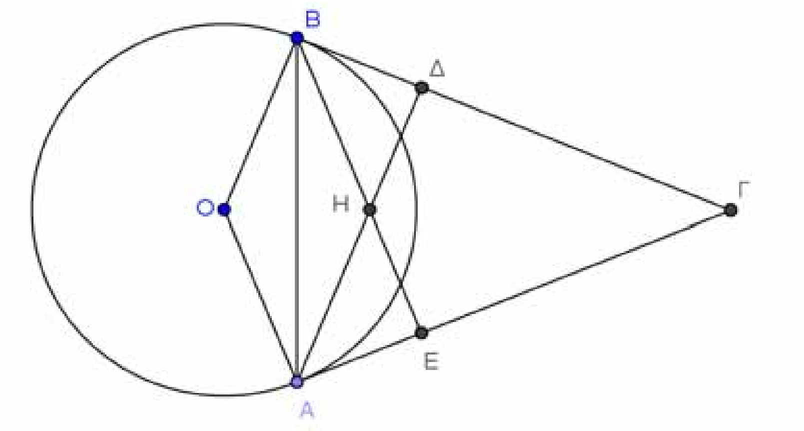
Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του Α και Β. Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ. Φέρουμε επίσης και τα ύψη ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) Τα σημεία Ο, Η, Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ =ΑΒ ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΑ.

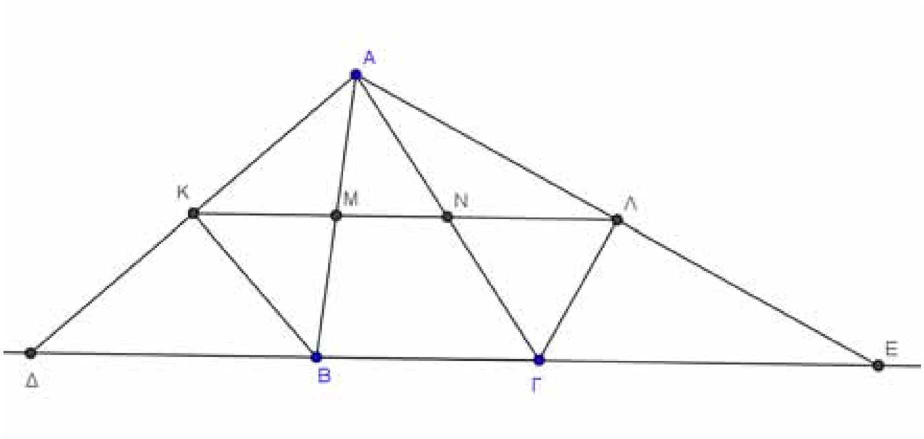
Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνουν τις ΑΔ και ΑΕ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, και η ΚΛ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα,

να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΚΜΑ και ΑΝΛ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)

γ) ΚΛ = $\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Gamma}}{2}$ (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

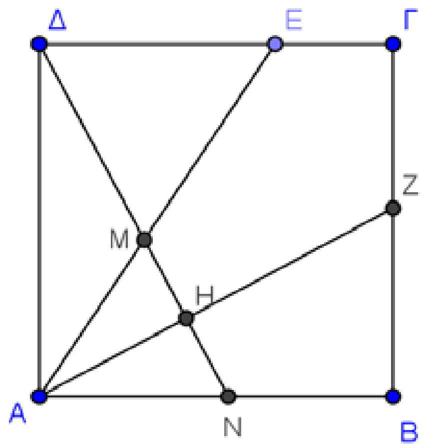
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΕΑΒ και την ΔΗ κάθετη από το Δ προς την ΑΖ, η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) ΑΜ=ΑΝ και ΔΕ=ΕΜ. (Μονάδες 10)

γ) ΑΖ = ΔΕ + ΒΖ (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

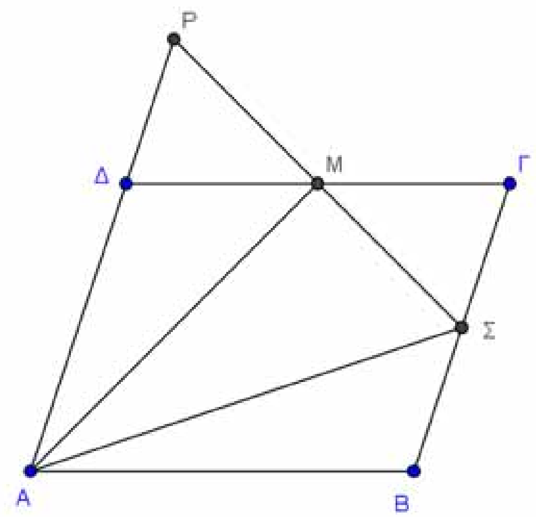
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΓ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΜ στο σημείο της Μ, η οποία τέμνει την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ρ και την ΒΓ στο Σ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΡ = ΣΓ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΡΣ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) ΑΣ = ΑΔ + ΓΣ. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

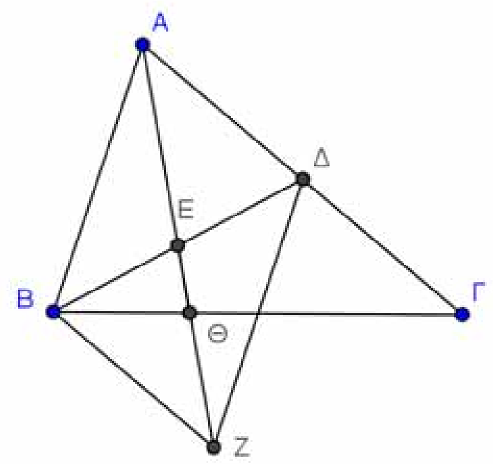
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου ΒΔ. Στην προέκταση της ΑΕ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΕΖ=ΑΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

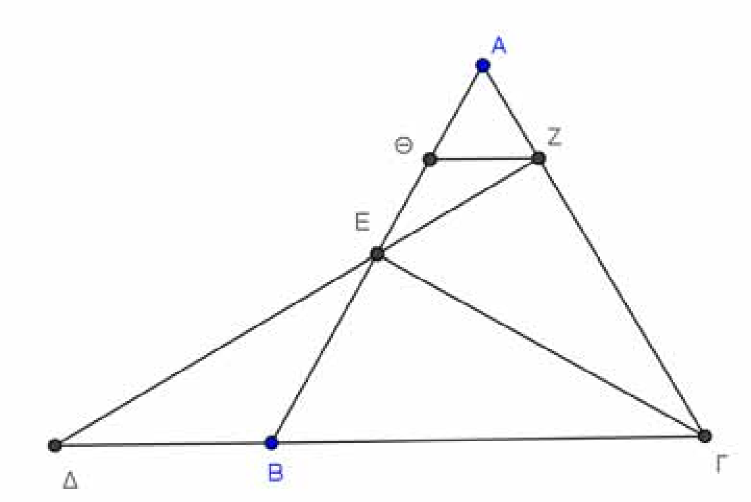
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΕ. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΔ = $\frac{ΒΓ}{2}$. Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και ΖΘ // ΒΓ:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΕ = 2 ΘΖ. (Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι 3ΑΒ = 4ΘΒ. (Μονάδες 5)



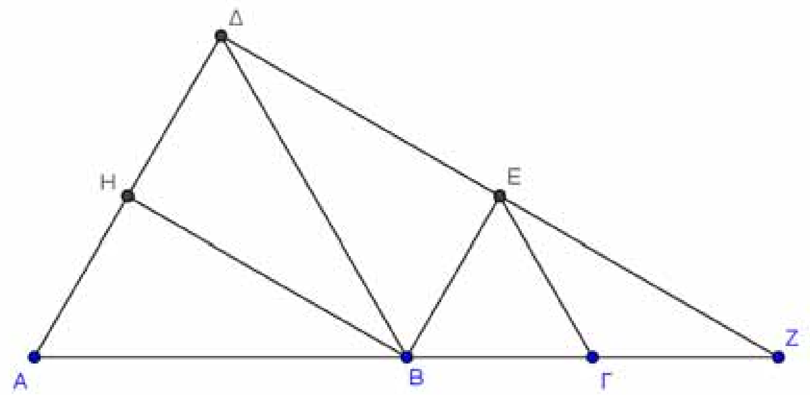
ΘΕΜΑ 4

Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε ΑΒ = 2 ΒΓ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΔ και η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

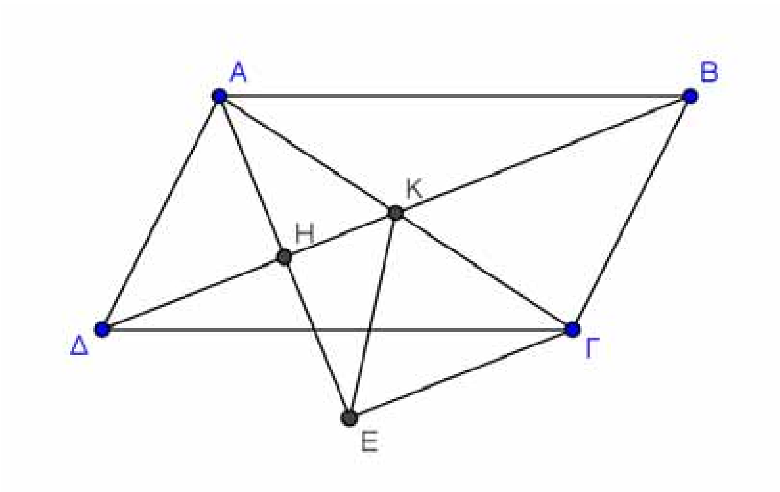
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΑΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

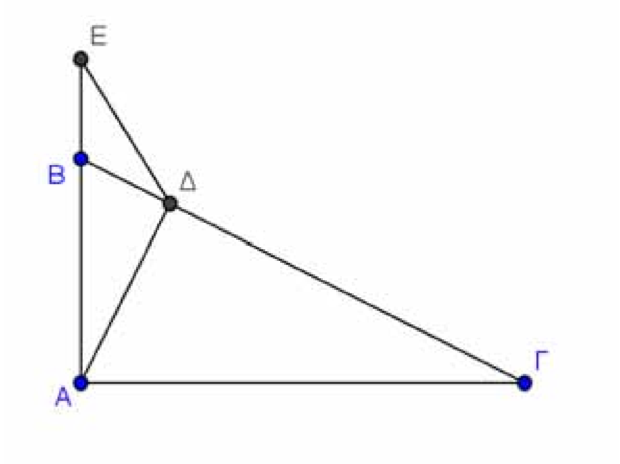
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε ΒΕ = ΒΔ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. ΒΕ = $\frac{AB}{2}$ (Μονάδες 8)

ii. ΑΕ = ΓΔ (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες Β και Γ οξείες και Δ, Μ και Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των ΑΒ και ΒΓ και εκτός του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΔΖ = $\frac{AB}{2}$ και ΕΗ = $\frac{B\Gamma}{2}$.

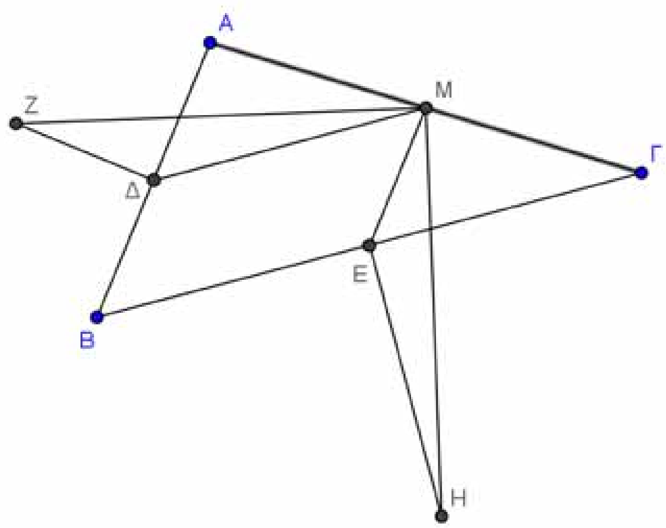
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)

ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία Α=90°.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

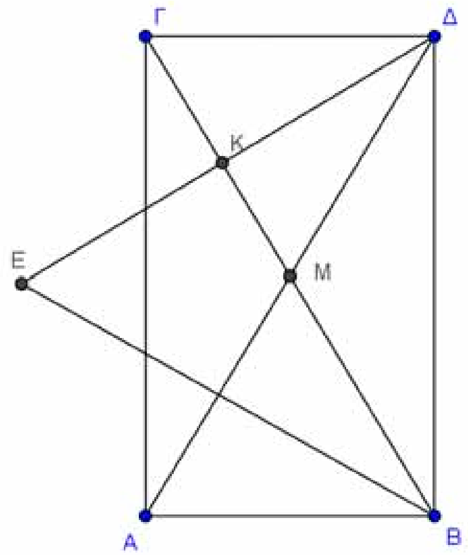
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90^o). Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του Μ) κατά τμήμα ΜΔ = ΑΜ. Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας Β στο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 8)

α) $\mathrm{K}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 90^o - \dfrac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$ (Μονάδες 8)

β) ΔΕ = ΒΔ (Μονάδες 9)



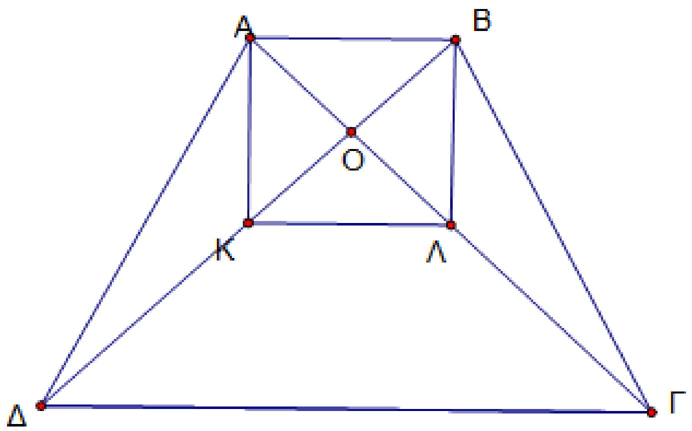
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $ΑΔ = ΒΓ$, $ΑΓ = ΒΔ$, και ΑΒ $\langle$ ΓΔ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι ΓΔ=3ΑΒ και Κ , Λ τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ($\hat{\mathrm{A}} = 90^o$) και $\hat{\Gamma} = 30^o$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

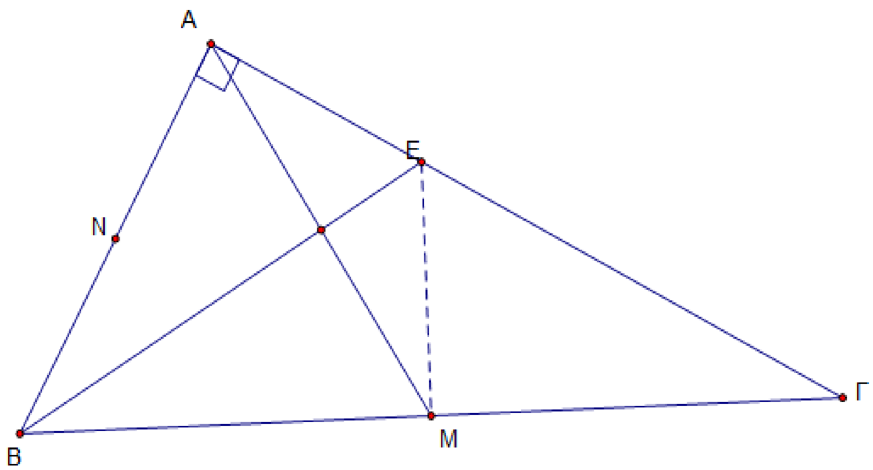
α) Να αποδείξετε ότι:

i) η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$. (Μονάδες 6)

ii) $\mathrm{AE} = \frac{\Gamma\mathrm{E}}{2}$. (Μονάδες 6)

iii) η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 7)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

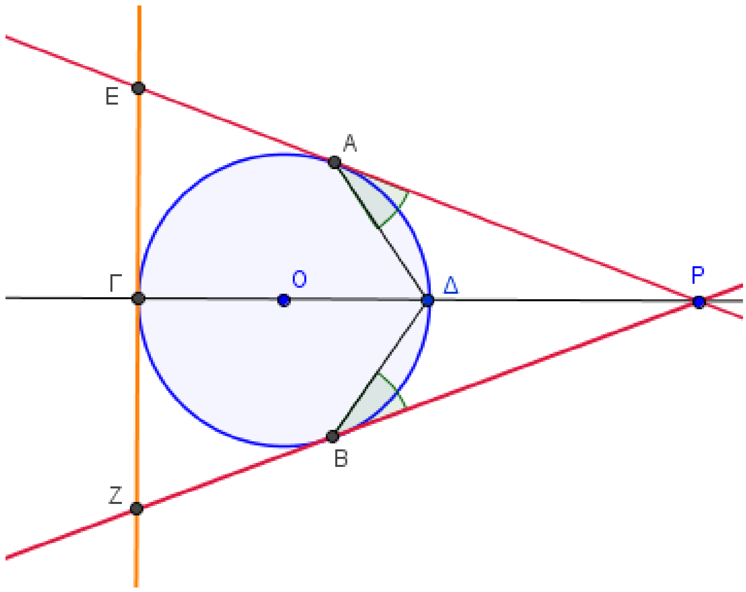
Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ, ΡΒ και τη διακεντρική ευθεία ΡΟ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει τις προεκτάσεις των ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{A}P = \Delta\hat{B}P$ (Μονάδες 8)

β) ΕΑ=ΖΒ (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



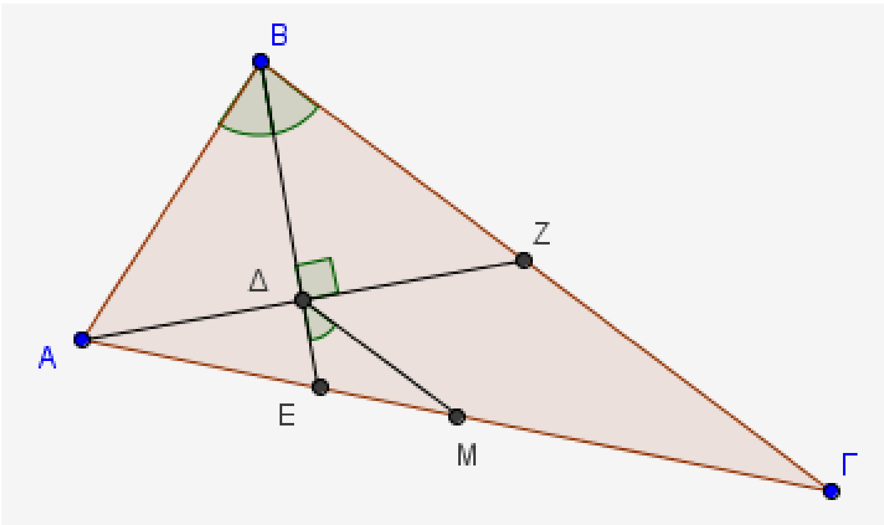
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΒΓ και η διχοτόμος ΒΕ της γωνίας $\hat{B}$. Αν ΑΖ $\perp$ ΒΕ, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) ΔΜ//ΒΓ και ΔΜ = $\frac{B\Gamma - AB}{2}$ (Μονάδες 10)

γ) $E\hat{\Delta}M = \frac{\hat{B}}{2}$, όπου $\hat{B}$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)



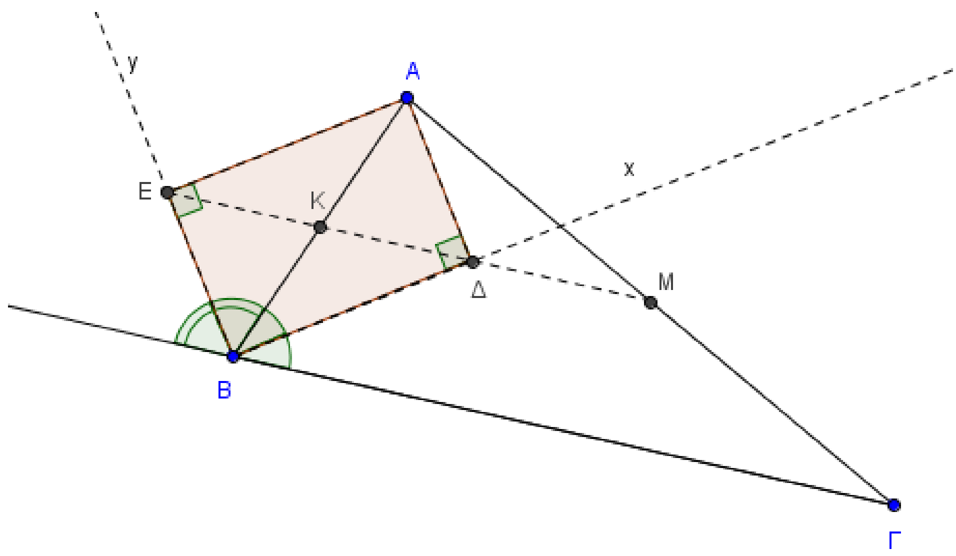
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος Βx της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας Β. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) Η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ. (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου α=ΒΓ. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

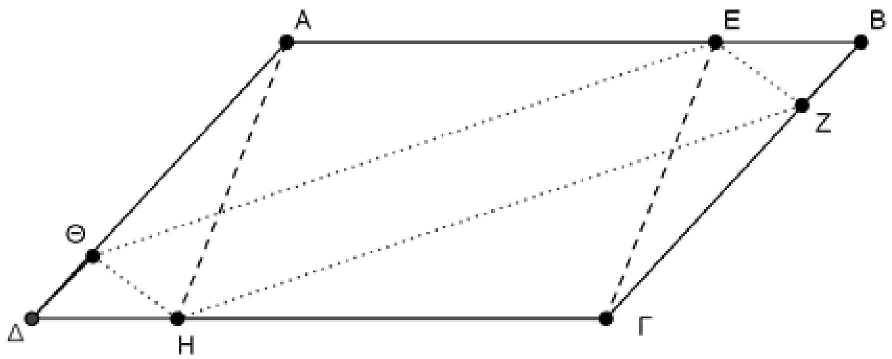
Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με ΑΕ=ΓΗ και ΒΖ=ΔΘ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο. (6 μονάδες)

β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. (10 μονάδες)

γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (9 μονάδες)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ, Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια ώστε να ισχύει ΒΚ=ΚΛ=ΛΔ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Ποιά πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΝΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στην διαγώνιο ΒΔ. Εάν Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την διαγώνιο ΒΔ, τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) ΖΓ = 2ΟΕ. (Μονάδες 9)

γ) Το ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ=ΑΒ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα ΔΖ=ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)

ii. Τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε ΚΛ// ΔΒ και $\mathrm{K\Lambda} = \frac{3}{2}\Delta\mathrm{B}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

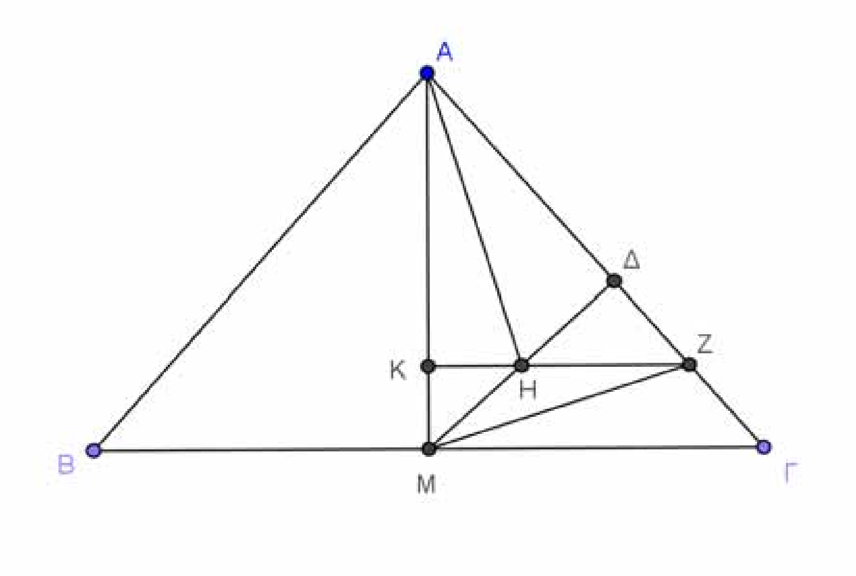
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε ΜΔ κάθετη στην ΑΓ και θεωρούμε Η το μέσο του τμήματος ΜΔ. Από το Η φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΜ και ΑΓ στα σημεία Κ και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΗΖ = $\frac{\text{ΒΓ}}{4}$ (Μονάδες 9)

β) ΜΖ // ΒΔ (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΔ. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει $ΑΔ = ΔΓ$.

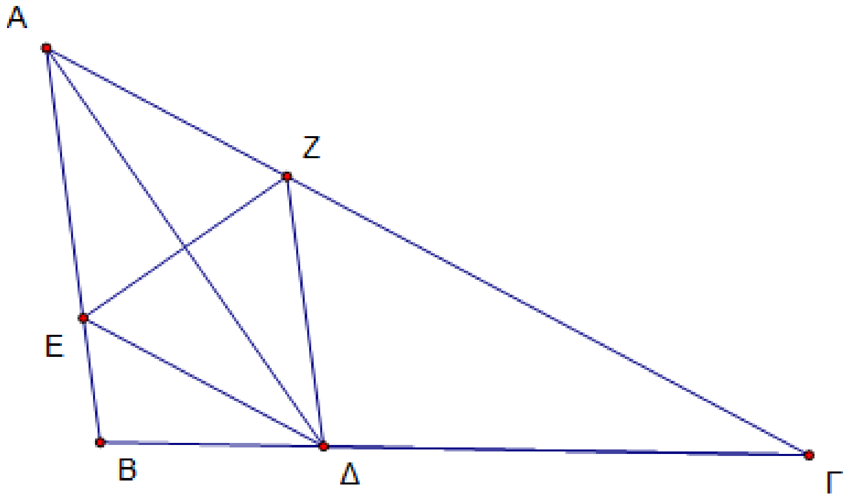
Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)



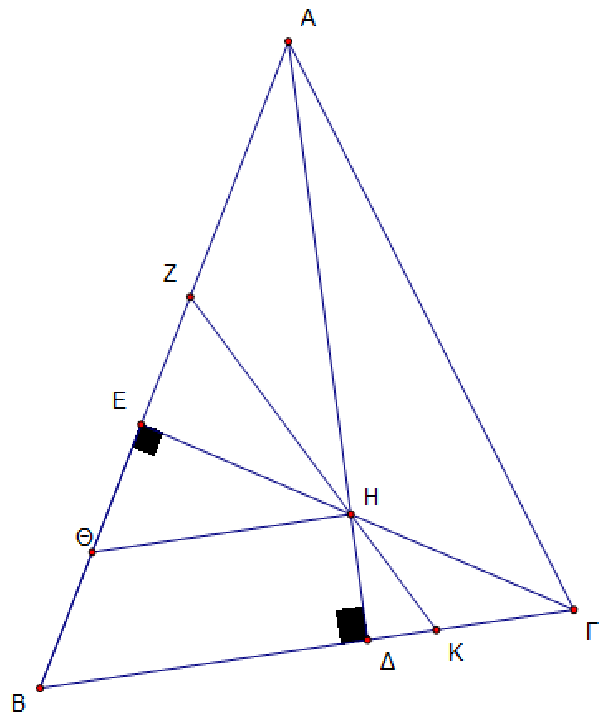
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $B=60^o$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε ΚΖ διχοτόμο της γωνίας ΕΗΑ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Για το τμήμα ΖΕ ισχύει ΖΗ=2ΕΖ. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ.

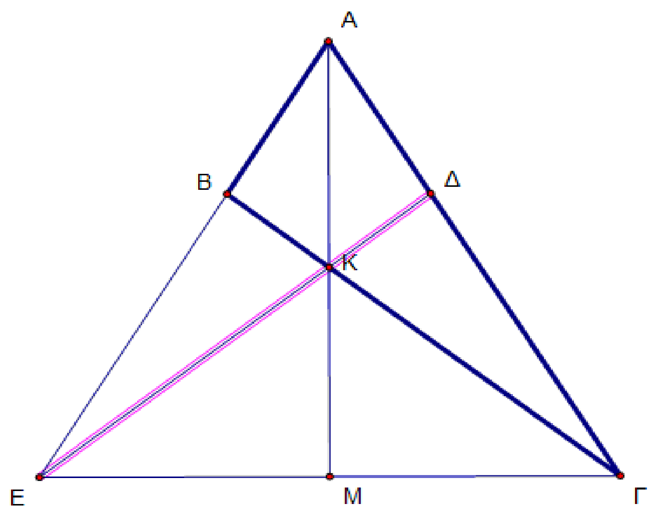
Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = \Delta E$ (Μονάδες 6)

β) $BK = K\Delta$ (Μονάδες 7)

γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. (Μονάδες 6)

δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ. (Μονάδες 6)



ΜΑΘΗΜΑ	Μαθηματικά: Γεωμετρία
ΤΥΠΟΣ ΛΥΚΕΙΟΥ	Γ. Ε. Λ.

ΣΤΟΧΟΙ του Π.Σ. των οποίων η υλοποίηση ελέγχεται μέσω της δραστηριότητας	Τ2 Τ3
Ενδεικτική Απάντηση	**4.1 4.2**
ΘΕΜΑ	**4**
ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΑΠΑΙΤΗΣΗ της δραστηριότητας	

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Έστω σημείο Α εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ ώστε να ισχύει $\widehat{\mathrm{B}\mathrm{A}\Gamma} = 60^o$. Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

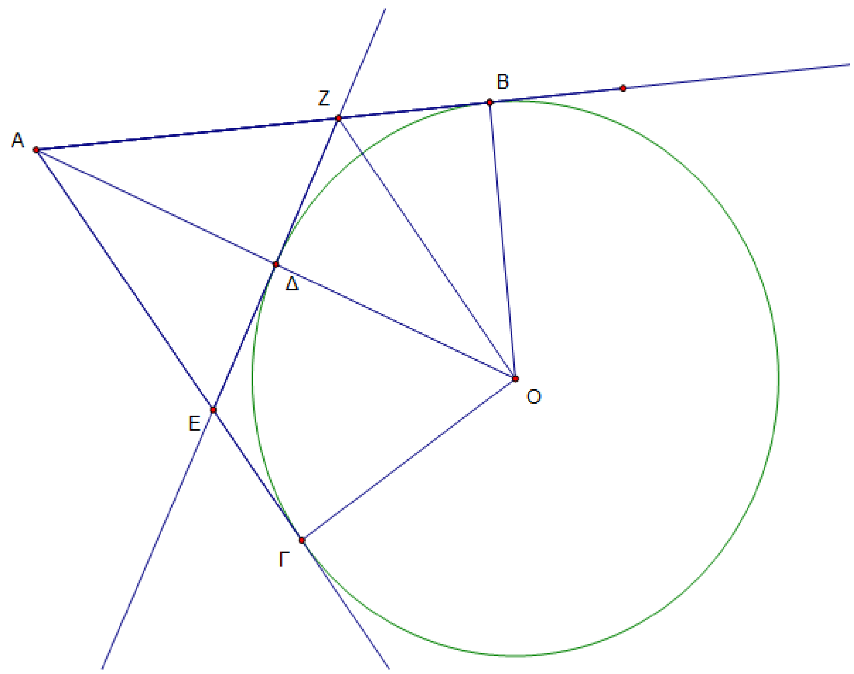
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμο με ΟΑ=2ΟΒ. (Μονάδες 6)

β) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)

γ) $2\mathrm{ZB} = \mathrm{AZ}$ (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε τις χορδές ΑΔ=ΒΓ. Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

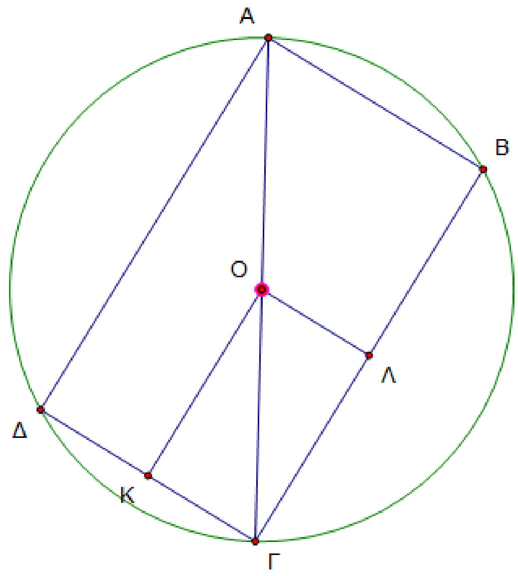
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

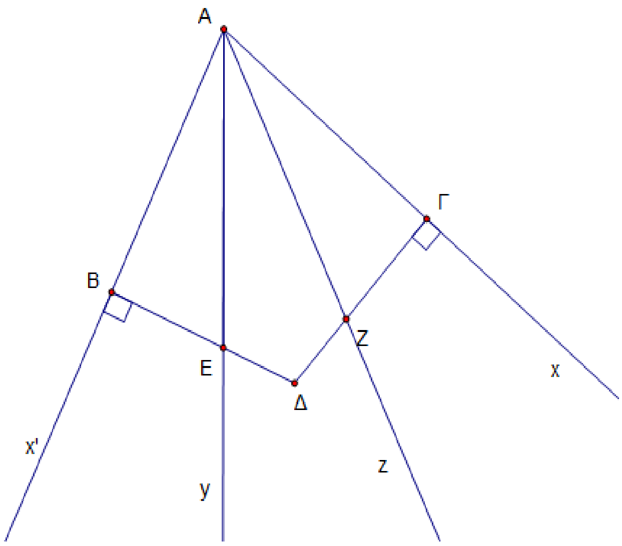
Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $x'\hat{A}x$ θεωρούμε σημεία Β και Γ ώστε ΑΒ=ΑΓ. Οι κάθετες στις Αx' και Αx στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ.

Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις ΒΔ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{EAZ}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{A}x$. (Μονάδες 8)

γ) Οι γωνίες ΓΒΔ και ΓΑΔ είναι ίσες. (Μονάδες 9)



Θέμα 4

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Ένας παίκτης τοποθετεί μια μπάλα στο σημείο Α το οποίο ανήκει στη μεσοκάθετη της ΘΗ και απέχει από αυτή απόσταση ίση με ΘΗ. Όταν ο παίκτης χτυπήσει τη μπάλα αυτή ακολουθεί τη διαδρομή $Α \rightarrow Β \rightarrow Γ \rightarrow Δ \rightarrow Α$ χτυπώντας στους τοίχους του μπιλιάρδου ΕΘ, ΘΗ, ΖΗ διαδοχικά. Για τη διαδρομή αυτή ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ η γωνία ΑΒΕ) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία ΘΒΓ) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45^{o}.

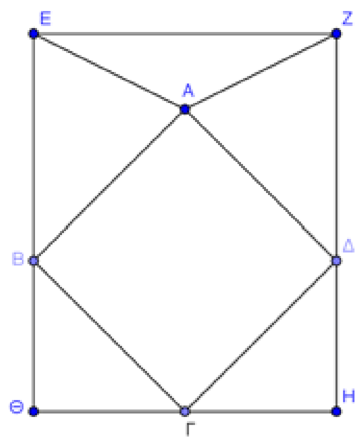
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η διαδρομή ΑΒΓΔ της μπάλας είναι τετράγωνο. (Μονάδες 9)

ii. Το σημείο Α ισαπέχει από τα τις κορυφές Ε και Ζ του μπιλιάρδου.

(Μονάδες 8)

β) Αν η ΑΖ είναι διπλάσια από την απόσταση του Α από τον τοίχο ΕΖ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ. (Μονάδες 8)



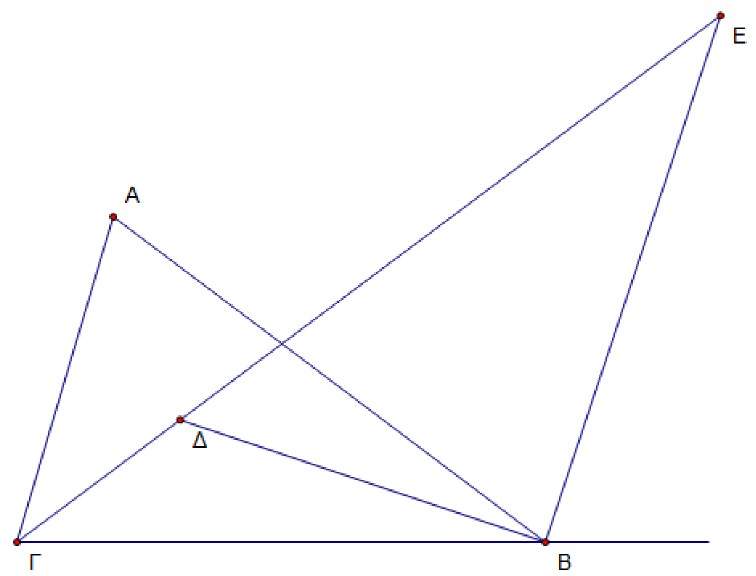
ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\overset{\Lambda}{\mathrm{B}}$ και $\overset{\Lambda}{\Gamma}$ τέμνονται στο Δ. Η εξωτερική διχοτόμος της Β τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο Ε. Δίνεται ότι $\mathrm{A}\overset{\Lambda}{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 70^o = 2\Gamma\overset{\Lambda}{\mathrm{E}}\mathrm{B}$

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΒΕ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές (Μονάδες 8)

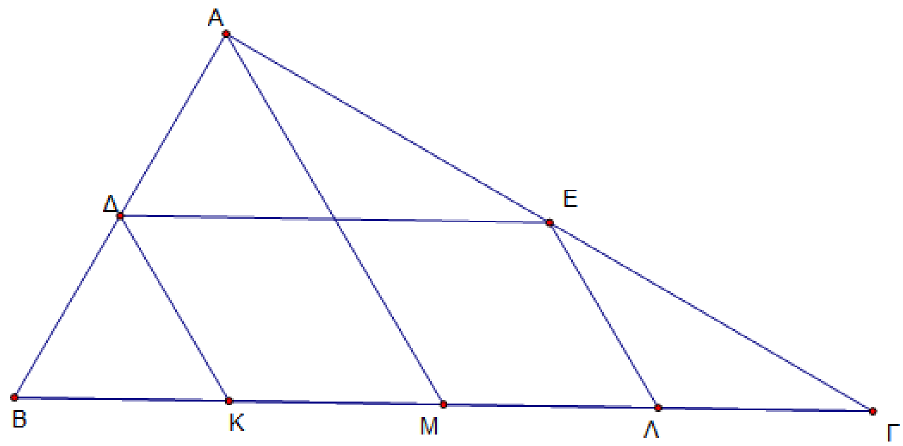


ΘΕΜΑ 4

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^o$. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Κ, Μ, Λ ώστε $\mathrm{BK} = \mathrm{KM} = \mathrm{M\Lambda} = \Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Η διάμεσος του τραπεζίου ΚΔΑΜ ισούται με $\frac{3}{8}\mathrm{B\Gamma}$. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) με $\hat{\mathrm{B}} = 2\hat{\Gamma}$ και $\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{A\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

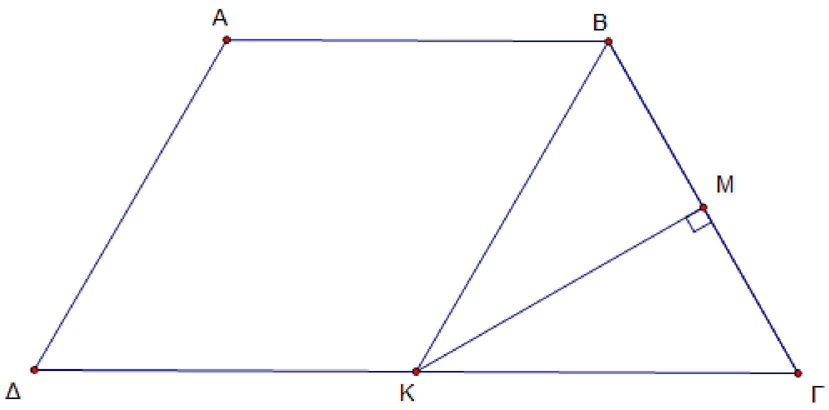
Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς το ΒΓ το τέμνει στο Μ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

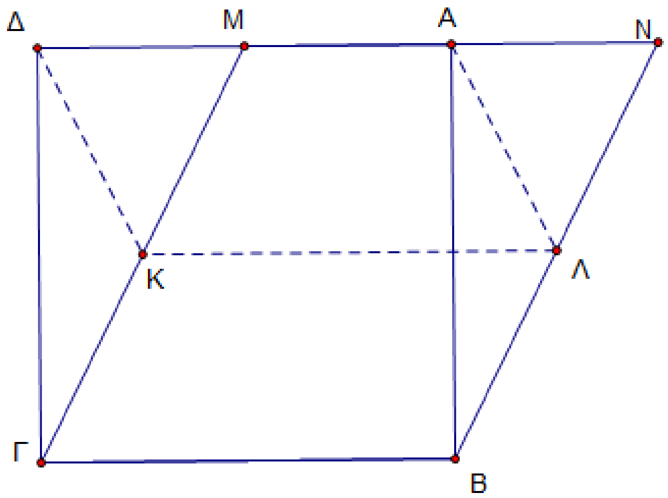
Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΑ . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΑ (προς την πλευρά του Α)κατά τμήμα ΑΝ= $\frac{ΑΔ}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓΜ και ΒΝ και θεωρούμε τα μέσα τους Κ και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και δύο κάθετες ακτίνες του ΟΒ και ΟΓ. Έστω Α το μέσον του τόξου ΒΓ. Από το Α φέρω κάθετες στις ακτίνες ΟΒ και ΟΓ που τις τέμνουν στα Δ και Ε αντίστοιχα. Οι προεκτάσεις των ΑΔ και ΑΕ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.

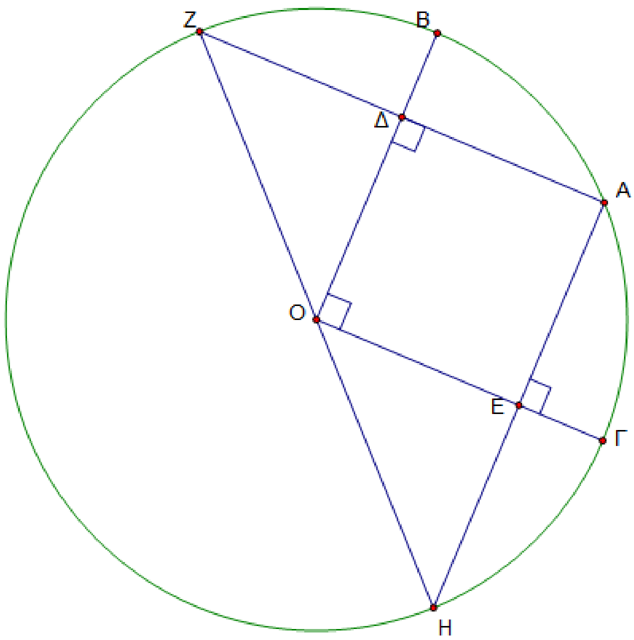
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΖ=ΑΗ . (Μονάδες 4)

α) Το ΑΔΟΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) Τα σημεία Ζ και Η είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 7)

γ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

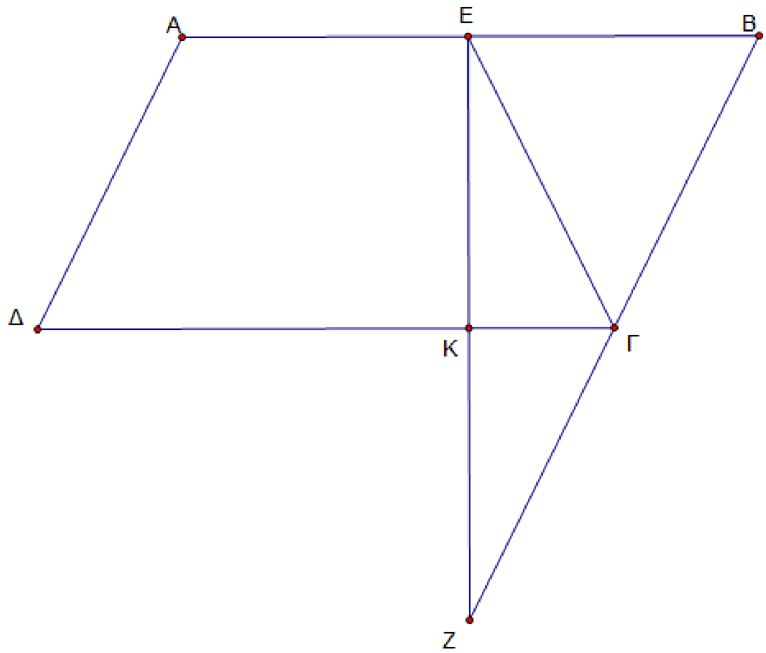
Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $=2$. Στην προέκταση του ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma Z = B\Gamma$. Θεωρούμε σημείο Ε στη ΑΒ, τέτοιο ώστε ΕΓ=ΓΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΕΖ είναι ορθή. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $\mathrm{AK}=\mathrm{K\Delta}$. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

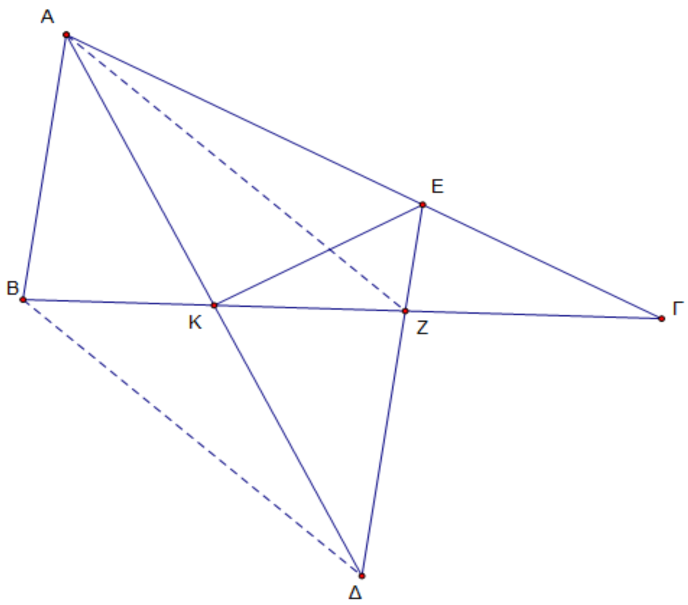
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Η ΕΚ είναι μεσοκάθετος της ΑΔ . (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

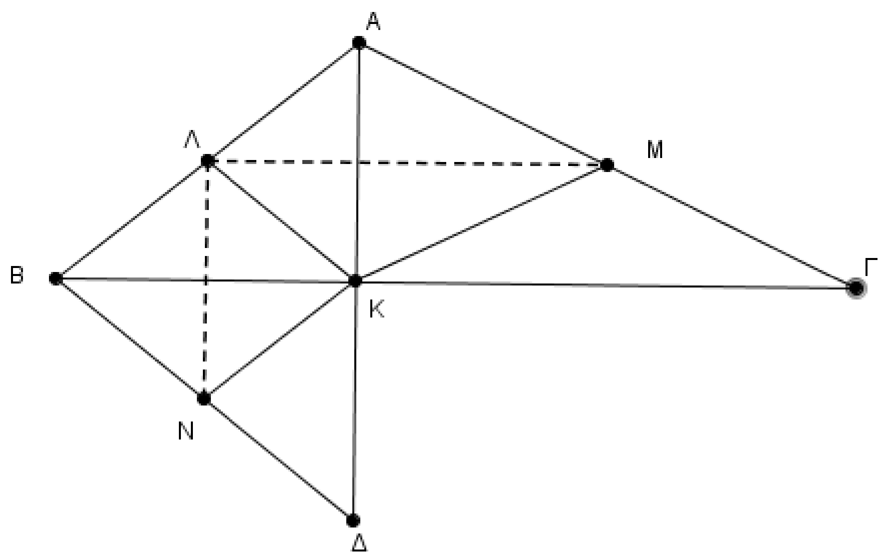
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $\mathrm{AK} = \mathrm{K}\Delta$. Έστω Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος . (Μονάδες 9)

γ) $\Lambda\mathrm{M} \perp \Lambda\mathrm{N}$ (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τις μεσοκαθέτους μ1, μ2 των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνονται στο μέσο Μ της ΒΓ.

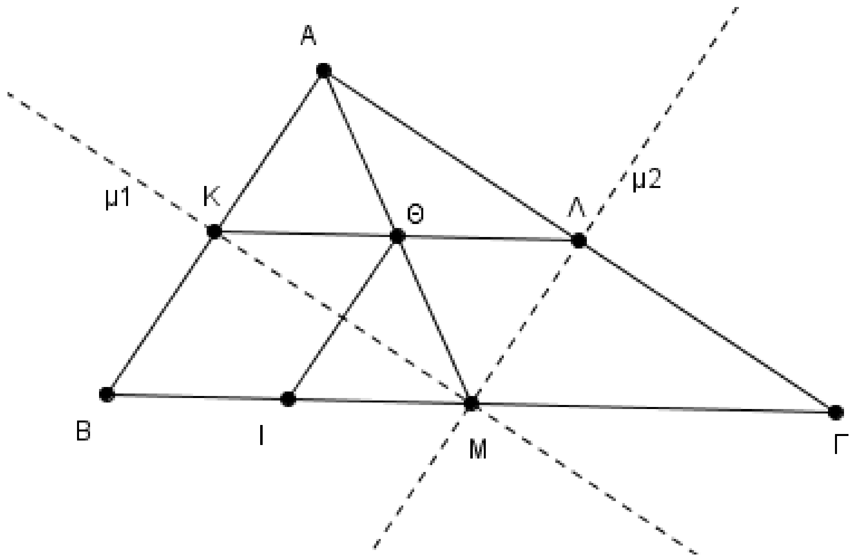
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$. (Μονάδες 5)

ii. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

iii. $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των ΑΜ και ΚΛ. (Μονάδες 6)

δ) Αν Ι σημείο της ΒΓ τέτοιο ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



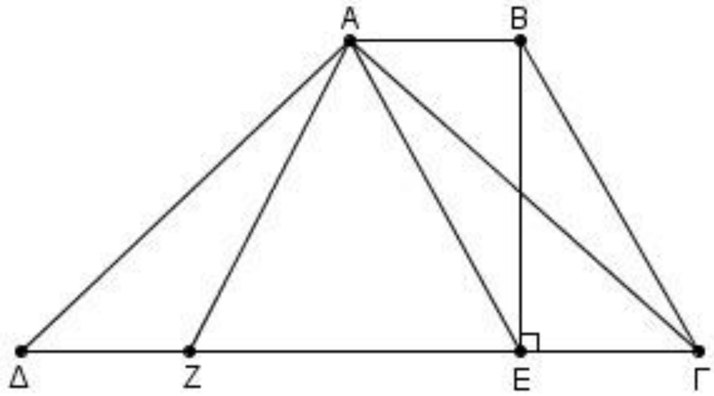
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB // \Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Ζ της ΓΔ, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60^0 και ΒΕ το ύψος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{AB}//\Gamma\Delta$ και ΑΔ= ΒΓ =ΑΒ. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

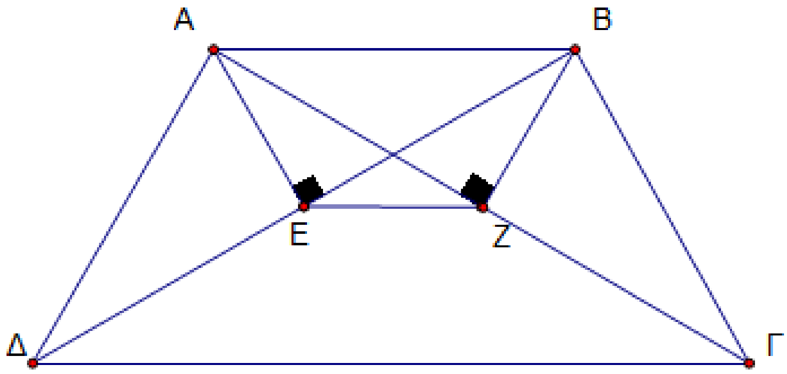
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

β) ΑΕ =ΒΖ . (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

δ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

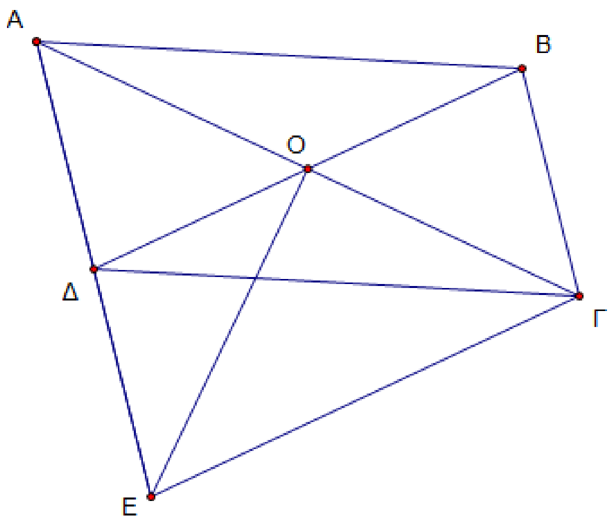
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ=ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

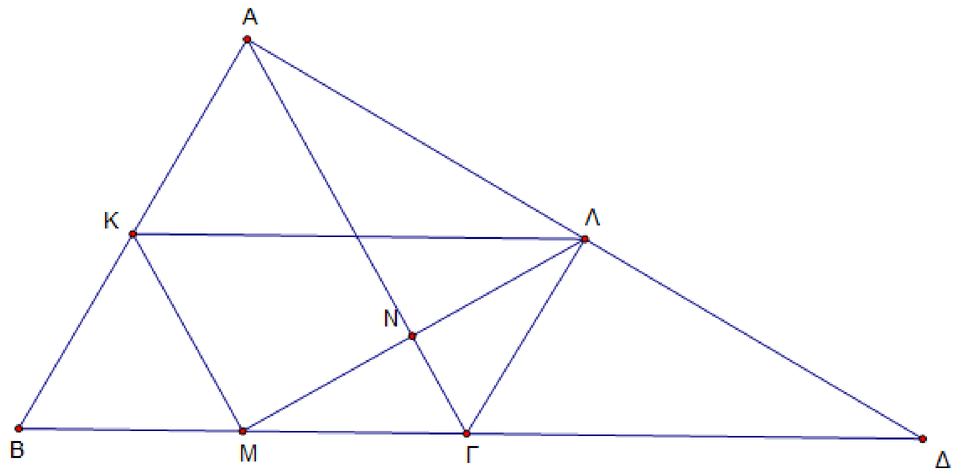
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = \mathrm{B}\Gamma$. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή. (Μονάδες 8)

ii) Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (Ο, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔΒ να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία Β είναι διπλάσια της γωνίας Δ και οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη ΒΔ στο Ο, η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

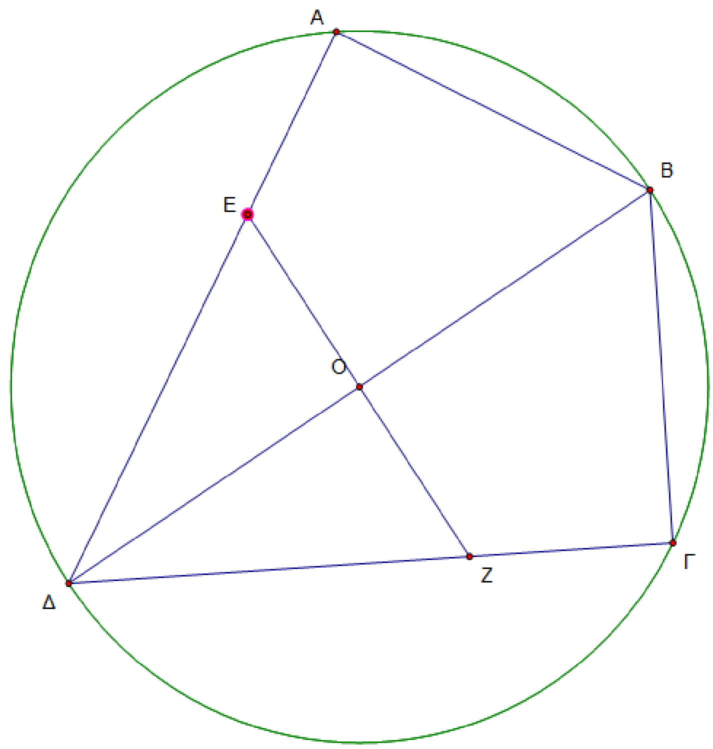
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^o\right)$ με ΒΔ διχοτόμο και ΑΚ ύψος, που τέμνονται στο Ε. Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.

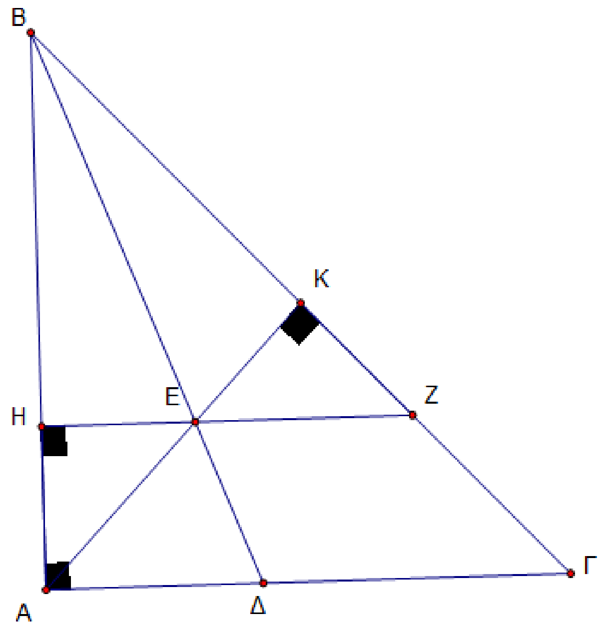
α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 6)

iii. Οι ΑΖ και ΒΔ είναι κάθετες. (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. (Μονάδες 6)



ΜΑΘΗΜΑ	Μαθηματικά: Γεωμετρία
ΤΥΠΟΣ ΛΥΚΕΙΟΥ	Γ. Ε. Λ.
ΣΤΟΧΟΙ του Π.Σ. των οποίων η υλοποίηση ελέγχεται μέσω της δραστηριότητας	Τ3 ΠΤ3

Ενδεικτική Απάντηση	
ΘΕΜΑ	**4**
ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΑΠΑΙΤΗΣΗ της δραστηριότητας	**4.1 4.2**

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με γωνία $\hat{\Delta} = 120^o$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

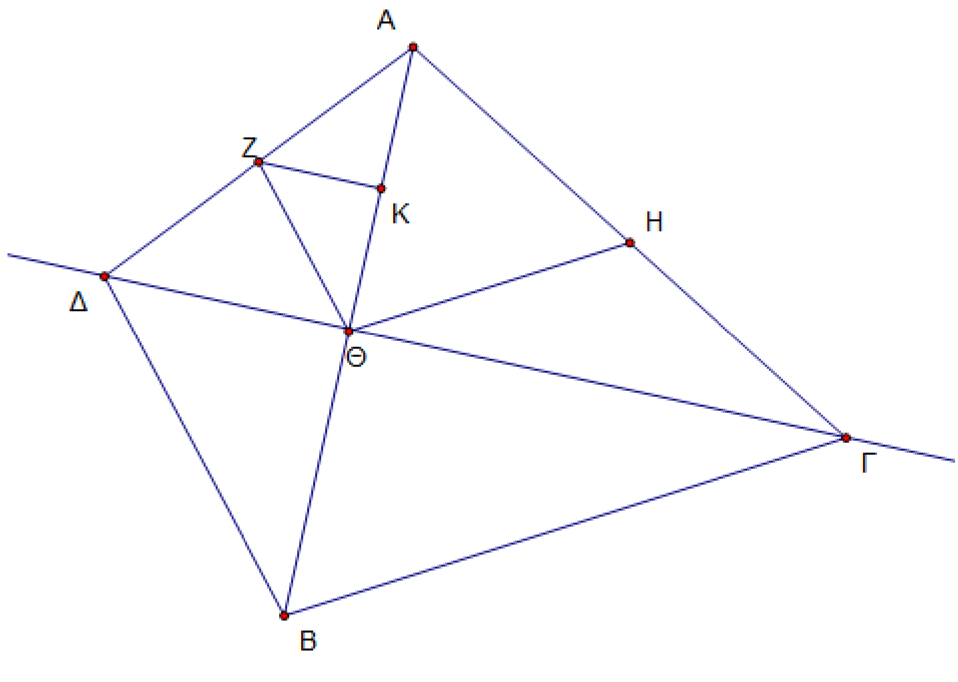
α) Να αποδείξετε ότι η ΔΓ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ. (Μονάδες 8)

β) Αν η ΔΓ τέμνει την ΑΒ στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία $Z\hat{\Theta}H$ είναι ορθή.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η ΖΚ είναι η κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στην ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ε και Ζ των ΓΔ, ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

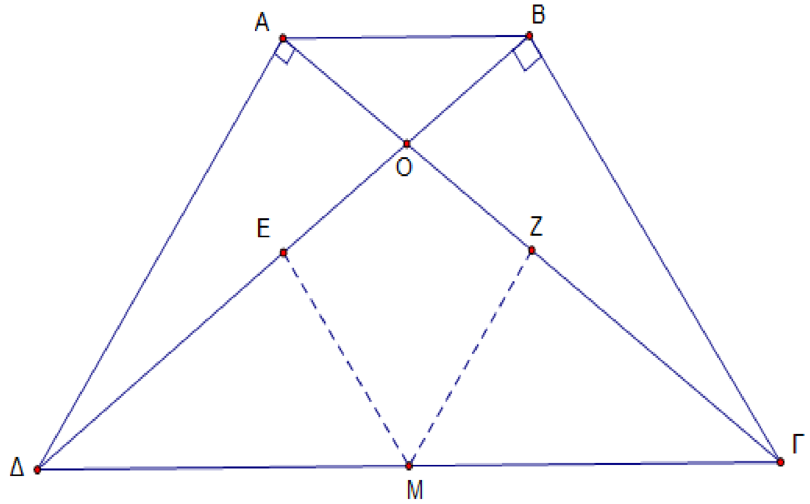
Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΕ=ΜΖ. (Μονάδες 6)

β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{M\Delta E}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{MZ\Gamma}}$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και τα μέσα Δ, Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα ΔΖ=ΔΜ.

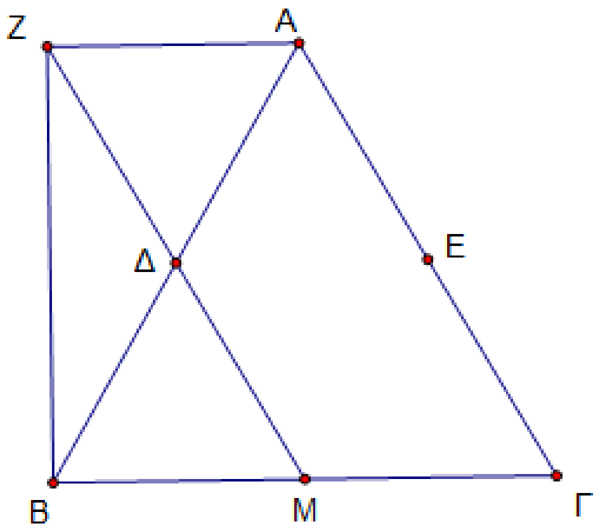
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AZ\Delta}$ και $\overset{\Delta}{BM\Delta}$ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται. (Μονάδες 7)

δ) Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ. (Μονάδες 6)



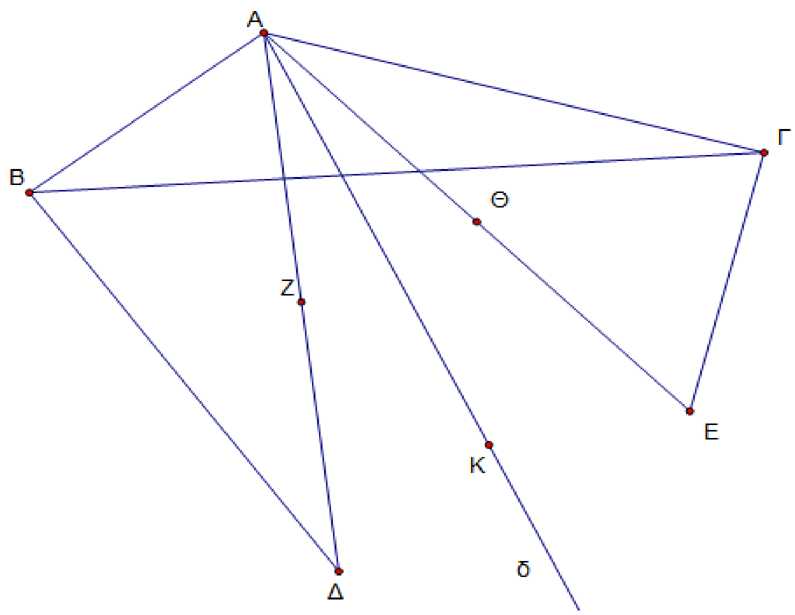
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με AB<AΓ. Φέρνουμε τμήμα ΒΔ κάθετο στην AB και με $B\Delta = A\Gamma$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην ΑΓ με $\Gamma E = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Θ των ΑΔ και ΑΕ καθώς και τη διχοτόμο Αδ της γωνία $\Delta\hat{A}E$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$. (Μονάδες 9)

β) Αν Κ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Αδ, να αποδείξετε ότι το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ. (Μονάδες 9)

γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο ώστε ΚΖ=ΑΖ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με ΑΒ=ΑΓ. Φέρνουμε τμήμα ΑΔ κάθετο στην ΑΒ και τμήμα ΑΕ κάθετο στην ΑΓ με ΑΔ=ΑΕ. Θεωρούμε τα μέσα Ζ, Η και Μ τα μέσα των ΔΒ, ΕΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta B}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{AE\Gamma}}$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

ii. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{ZAH}}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii. Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta B}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{AE\Gamma}}$ έγραψε τα εξής:

« 1. *ΑΔ=ΑΕ από υπόθεση*

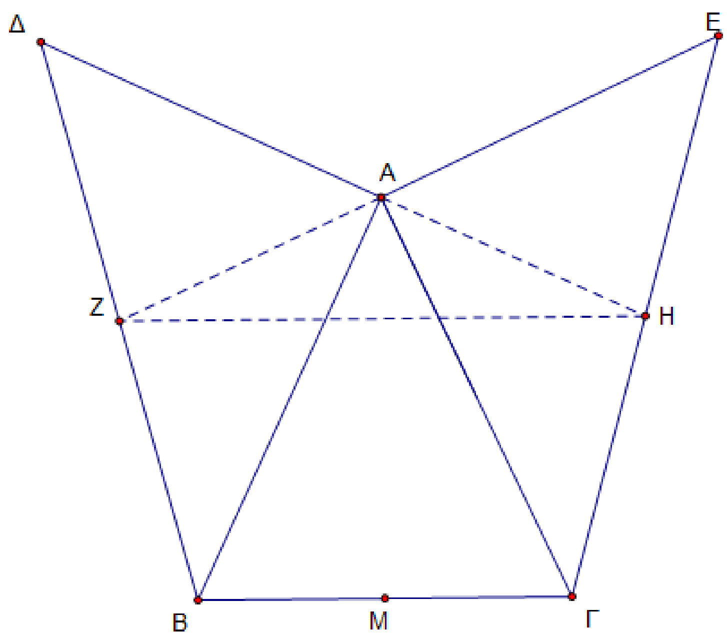
2. ΑΒ=ΑΓ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου

3. $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ *ως κατακορυφήν*

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος μπορείς να το εντοπίσεις;

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με Αδ τη διχοτόμο της γωνίας $\overset{\Lambda}{\mathrm{A}}$. Η μεσοκάθετος (μ) της πλευράς ΒΓ τέμνει την Αδ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρνουμε τις ΕΔ και ΖΔ κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΒΕ=ΓΖ . (Μονάδες 10)

ii. Το τετράπλευρο ΒΖΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

β) Κάποιος μαθητής έκανε τον εξής συλλογισμό:

«*Τα τρίγωνα* $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Delta}}$ *και* $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma\Delta}}$ *έχουν*

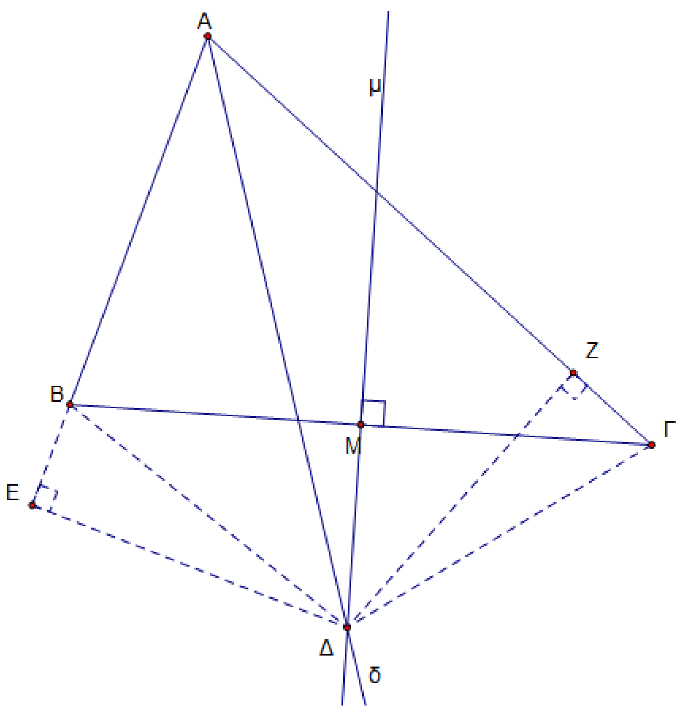
1. ΑΔ κοινή

2. $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{\Gamma\Delta}$ *λόγω μεσοκαθέτου*

3. Γωνίες $\mathrm{B}\overset{\Lambda}{\mathrm{A}}\Delta = \Gamma\overset{\Delta}{\mathrm{A}}\Delta$ *λόγω διχοτόμου.*

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο Πλευρά-Γωνία-Πλευρά»

Έχει δίκιο ή όχι ο μαθητής; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με $\overset{\Lambda}{\mathrm{A}} = 120^o$. Φέρουμε ημιευθεία Αx κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΔΓ.

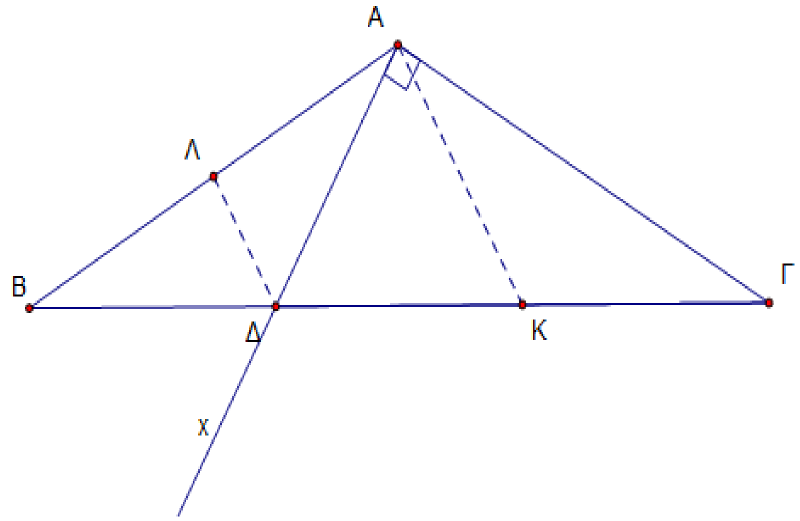
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta B}}$ είναι ισοσκελές (Μονάδες 8)

β) $\Delta\Gamma = 2\mathrm{B}\Delta$ (Μονάδες 8)

γ) $\Lambda\Delta // \mathrm{AK}$ (Μονάδες 5)

δ) ΑΚ=2ΛΔ (Μονάδες 4)



ΘΕΜΑ 4

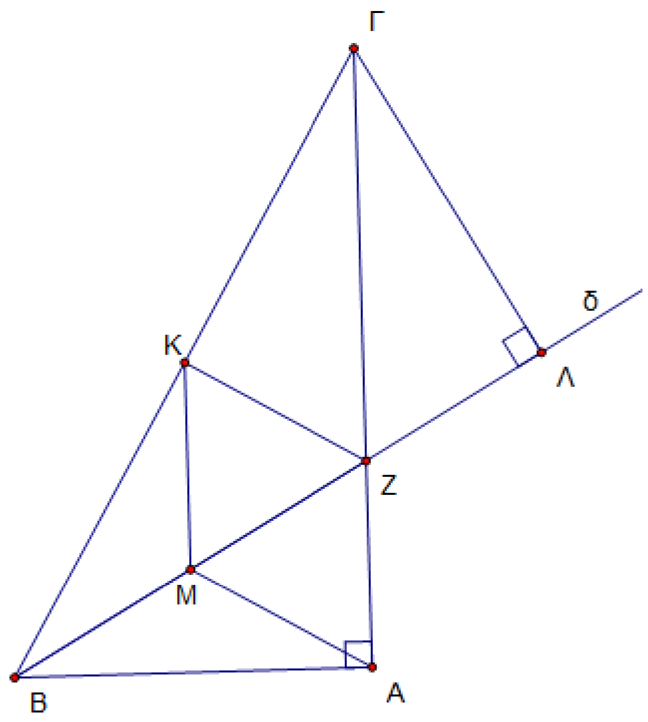
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^o$ και $\hat{\mathrm{B}} = 60^o$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ να αποδείξετε:

α) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{BZ\Gamma}}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

γ) $\mathrm{\Gamma Z} = 2\mathrm{ZA}$ (Μονάδες 7)

δ) $\mathrm{B\Lambda} = \mathrm{A\Gamma}$ (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με διάμεσο ΑΜ τέτοια ώστε ΑΜ=ΑΒ. Φέρουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $\mathrm{K\Delta = AK}$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ.

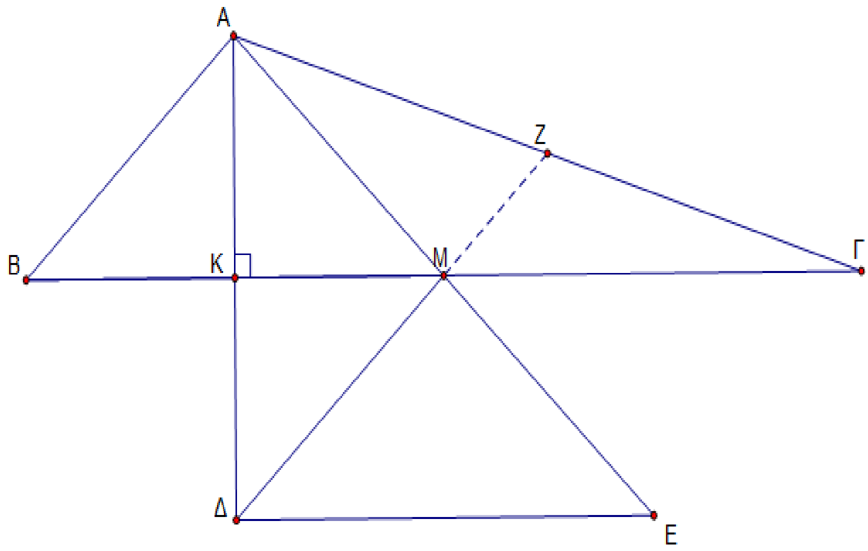
Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{\Delta E \perp A\Delta}$ και $\mathrm{\Delta E = 2KM}$ (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

δ) Η προέκταση της ΔΜ τέμνει το ΑΓ στο μέσον του Ζ. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

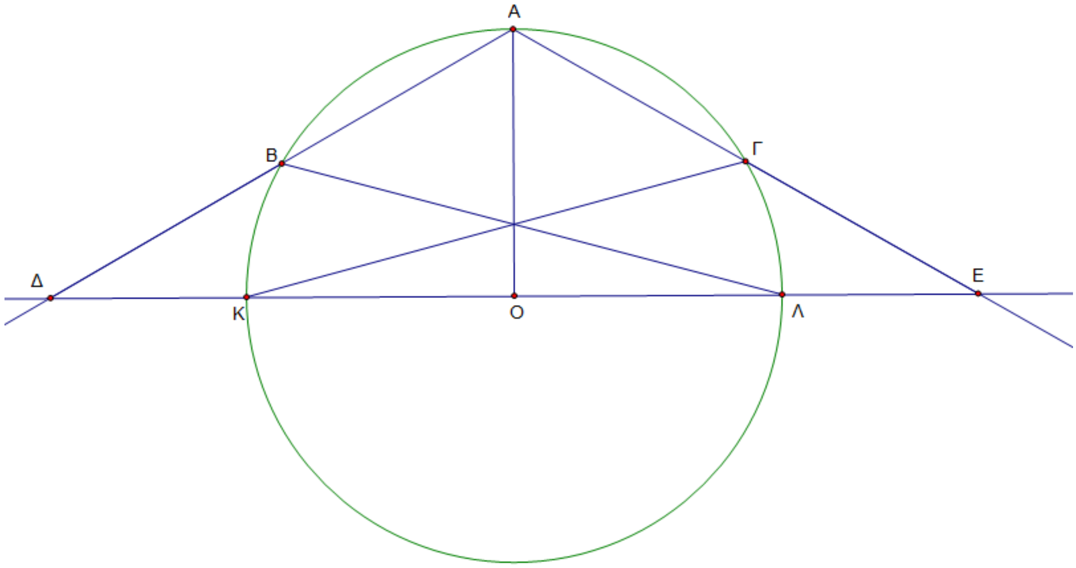
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΚΛ. Έστω Α σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα ΟΑ να είναι κάθετη στην ΚΛ. Φέρουμε τις χορδές $AB = A\Gamma = \rho$. Έστω Δ και Ε τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου ΚΛ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΑΓ είναι 120^o. (Μονάδες 7)

β) Τα σημεία Β και Γ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)

γ) $K\Gamma = \Lambda B$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

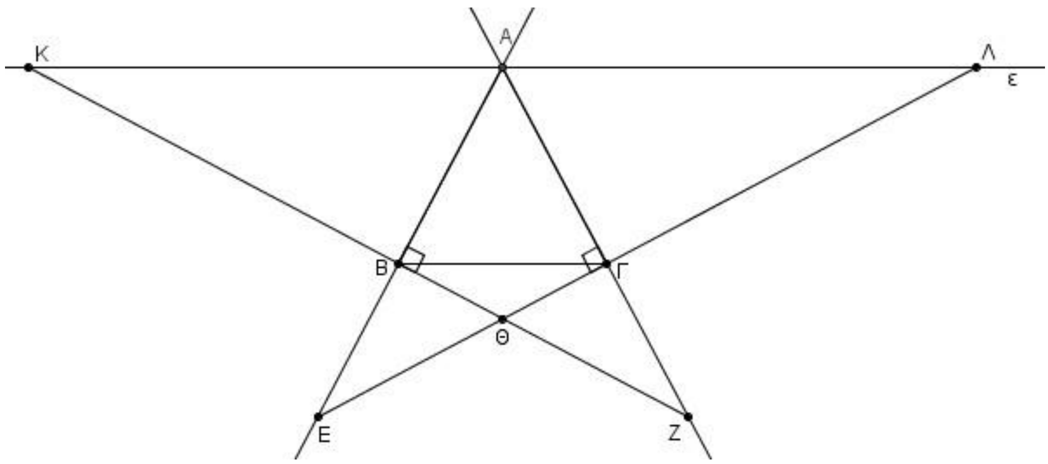
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στην πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στην πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΖ=ΑΕ (Μονάδες 8)

ii. ΑΚ=ΑΛ (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ και ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

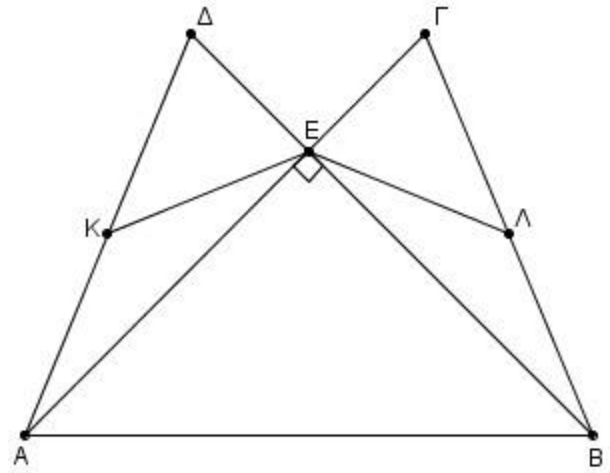
Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΒΔ (ΑΒ=ΑΔ), τέτοια ώστε οι πλευρές τους ΑΓ και ΒΔ να είναι κάθετες. Τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΔ=ΕΓ . (Μονάδες 7)

β) ΔΓ//ΑΒ . (Μονάδες 8)

γ) Το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές και ΚΛ//ΑΒ. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

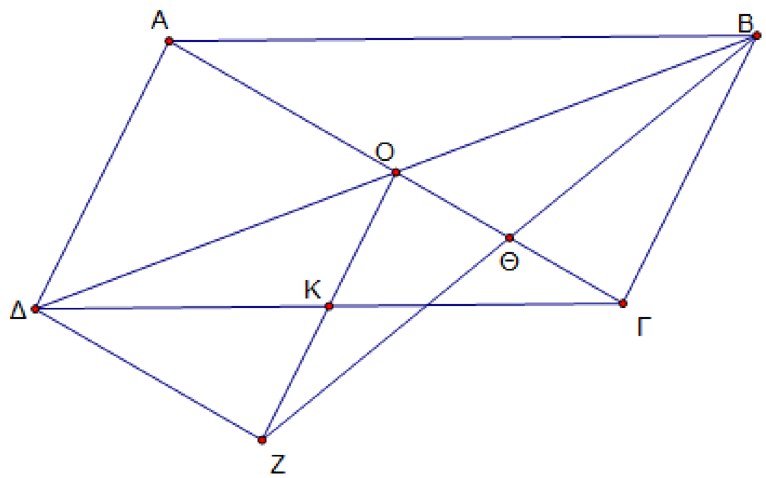
Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Κ το μέσο του ΓΔ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΟΚ κατά τμήμα $\mathrm{KZ} = \mathrm{KO}$. Η ΒΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Θ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

β) $\mathrm{AO} = \Delta\mathrm{Z}$. (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{AOB}}$ και $\overset{\Delta}{\Delta\mathrm{Z}\Gamma}$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

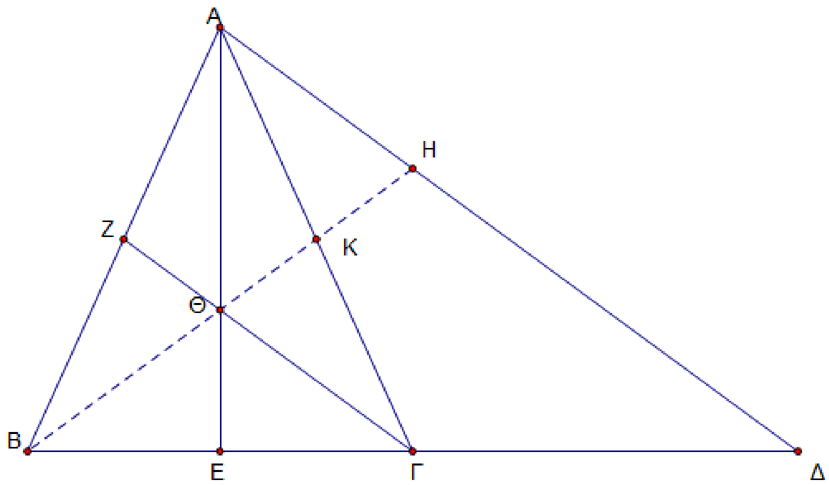
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Προεκτείνουμε το ΒΓ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta=\mathrm{B\Gamma}$. Φέρουμε τις διαμέσους ΑΕ και ΓΖ του τριγώνου $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ που τέμνονται στο Θ. Το ΒΘ προεκτεινόμενο, τέμνει το ΑΓ στο Κ και το ΑΔ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

β) $\mathrm{AH}=\Theta\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) ΑΗ=2ΖΘ. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

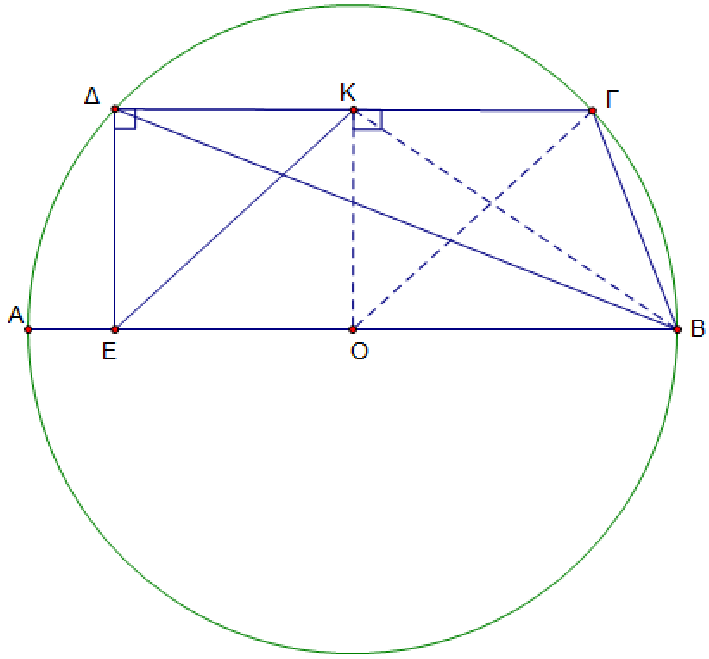
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta // \mathrm{AB}$ με Κ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{K} = \dfrac{\Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma}{2}$. (Μονάδες 12)

γ) $\mathrm{KE} < \mathrm{KB}$. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ με $\hat{A} = 90^o$ και Δ, Ε και Ν τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΒΓ θεωρούμε σημεία Κ και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$.

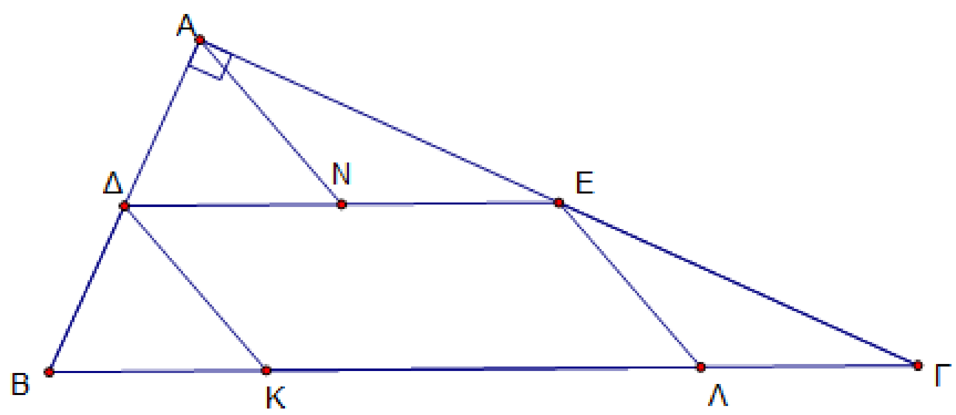
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{K}\Lambda = 2\hat{B}$ και $E\hat{\Lambda}K = 2\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο με $\Delta E = 2\Delta K$.

(Μονάδες 8)

γ) $AN = \Delta K = \dfrac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

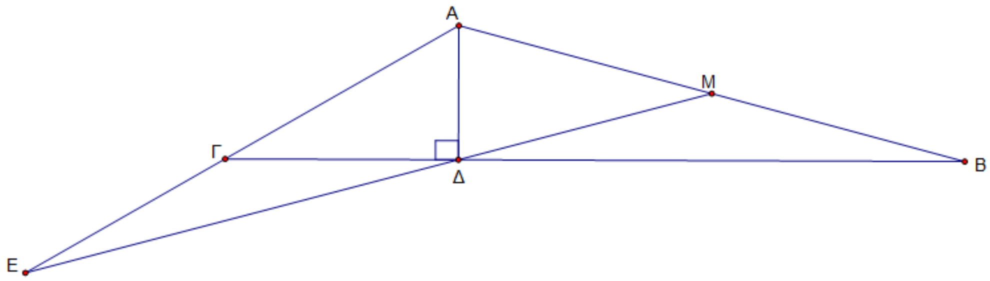
Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ($\mathrm{AB} > \mathrm{A\Gamma}$), ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\overset{\wedge}{\mathrm{B}} = \overset{\wedge}{\mathrm{E}}$. (Μονάδες 8)

β) $\overset{\wedge}{\Gamma} = 2\overset{\wedge}{\mathrm{B}} = \mathrm{A}\overset{\wedge}{\mathrm{M}}\Delta$. (Μονάδες 10)

γ) ΓΕ<ΑΓ. (Μονάδες 7)



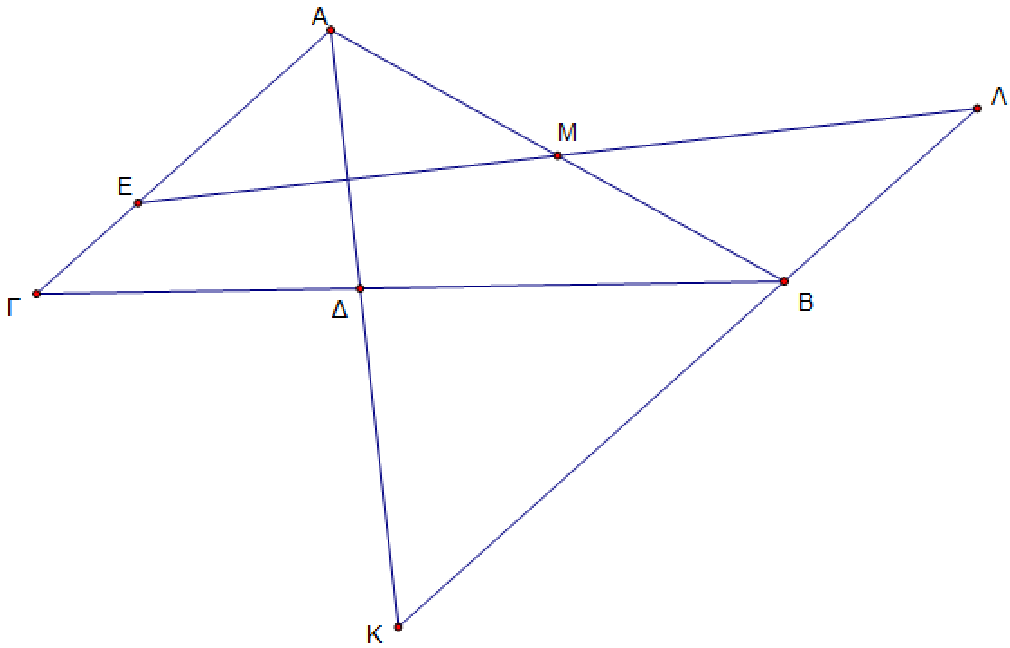
ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

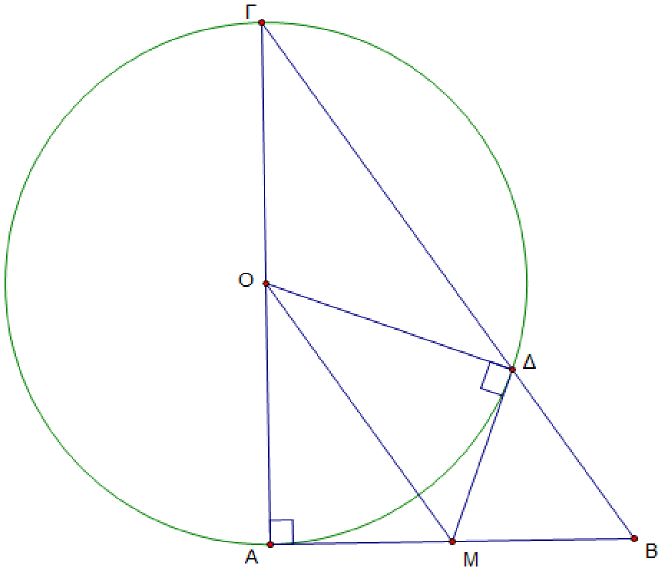
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ ($\hat{A} = 90^o$). Με διάμετρο την πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Δ. Απο το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την ΑΒ στο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{B}$ (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Delta MB}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το Μ είναι το μέσο του ΑΒ. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ($\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$) και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\overset{\Delta}{\mathrm{ABK}} = \overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma K}}$. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{ZKE}}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής στο (αi.) ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

«*Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου* $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ *και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε και το τρίγωνο* $\overset{\Delta}{\mathrm{BK\Gamma}}$ *είναι ισοσκελές.*

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{ABK}}$, $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma K}}$ *έχουν*

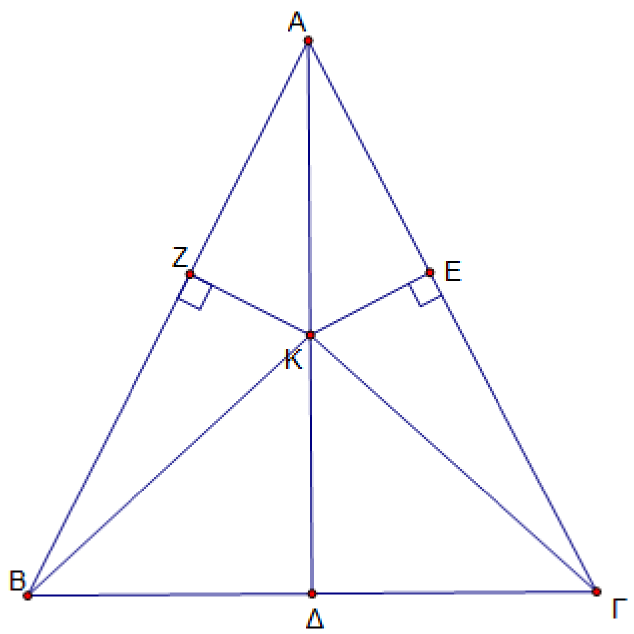
1. $\mathrm{BK} = \mathrm{K\Gamma}$

2. $\mathrm{B\hat{A}K} = \mathrm{\Gamma\hat{A}K}$ *επειδή ΑΚ διχοτόμος της* $\hat{\mathrm{A}}$

3. $\mathrm{A\hat{B}K} = \mathrm{A\hat{\Gamma}K}$ *ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.*

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία –Πλευρά- Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ. (Μονάδες 6)



Α
Ζ
Ε
Κ
Β
Δ
Γ

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες . (Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

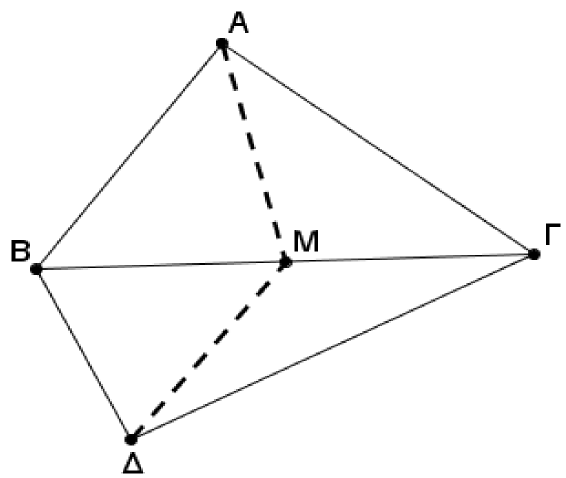
Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και ΔΒΓ ($\hat{\Delta} = 90^o$) (όπου Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ) και το μέσο Μ της ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) $A\hat{M}\Delta = 2A\hat{\Gamma}\Delta$ (Μονάδες 9)

γ) $\Gamma\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$ (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

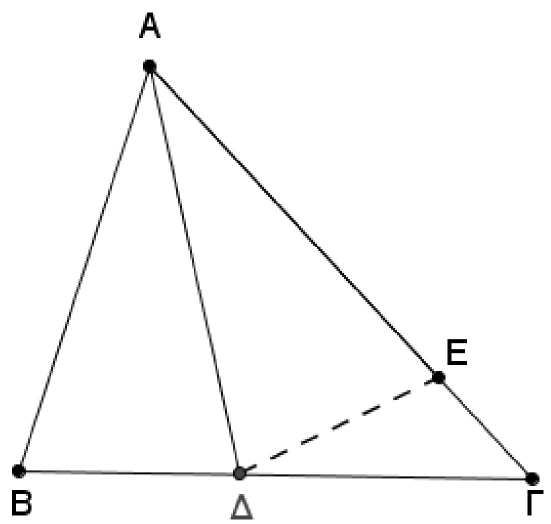
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΕ = ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΕ. (Μονάδες 9)

γ) αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ΓΔ $\perp$ ΒΓ με ΓΔ=ΑΒ (Α,Δ εκατέρωθεν της ΒΓ).

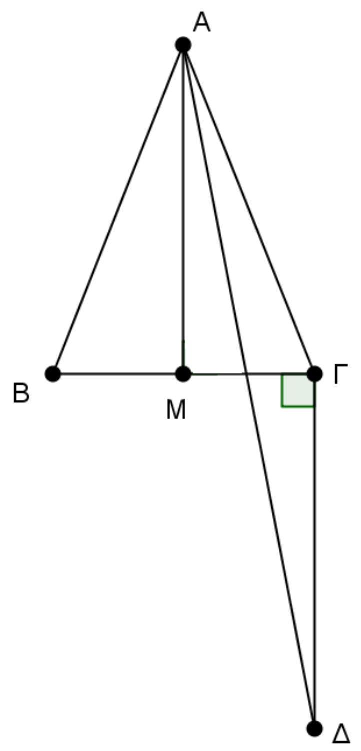
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ // ΓΔ (Μονάδες 6)

β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{M\hat{A}\Gamma}$. (Μονάδες 7)

γ) $\Delta\hat{A}\Gamma = 45^o - \dfrac{\hat{B}}{2}$ (Μονάδες 7)

δ) ΑΔ < 2 ΑΒ (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

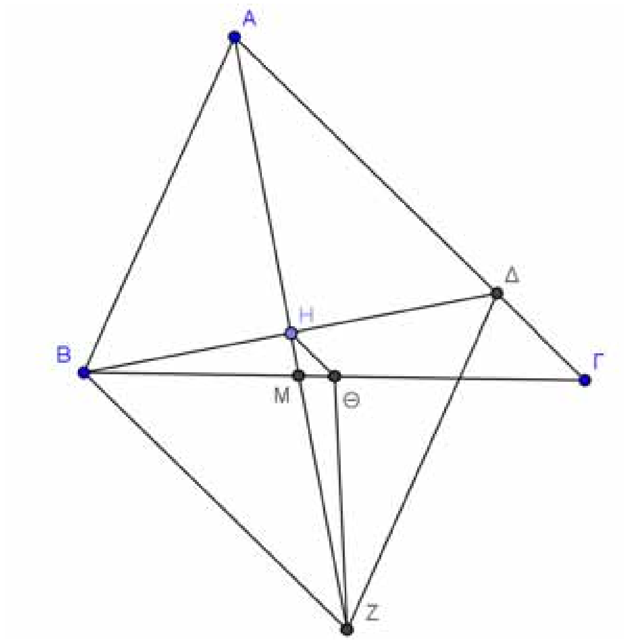
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Από το Β φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο ΑΜ της γωνίας Α, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Η και την ΑΓ στο Δ. Στην προέκταση της ΑΗ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΖ και έστω Θ το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β) το τετράπλευρο ΗΒΖΘ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) η διάμεσος του τραπεζίου ΗΒΖΘ είναι ίση με $\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}}{4}$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

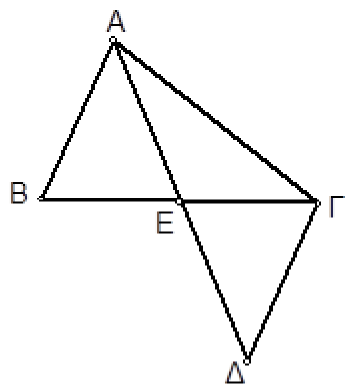
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ. (Μονάδες 5)

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)

iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ > ΑΔ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ, Ε στην ΔΓ και Σ, Τ στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

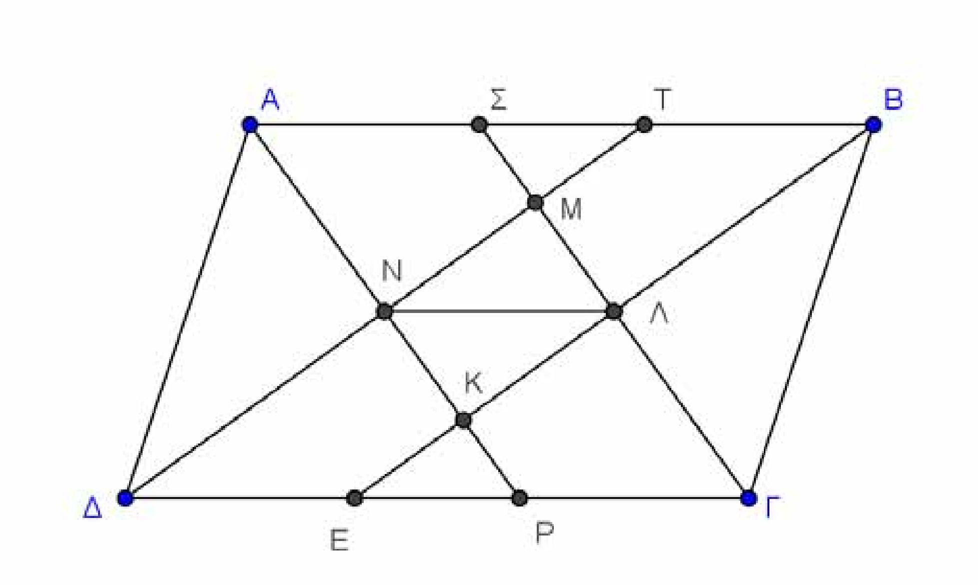
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

γ) ΛΝ // ΑΒ (Μονάδες 5)

δ) ΛΝ = ΑΒ – ΑΔ (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

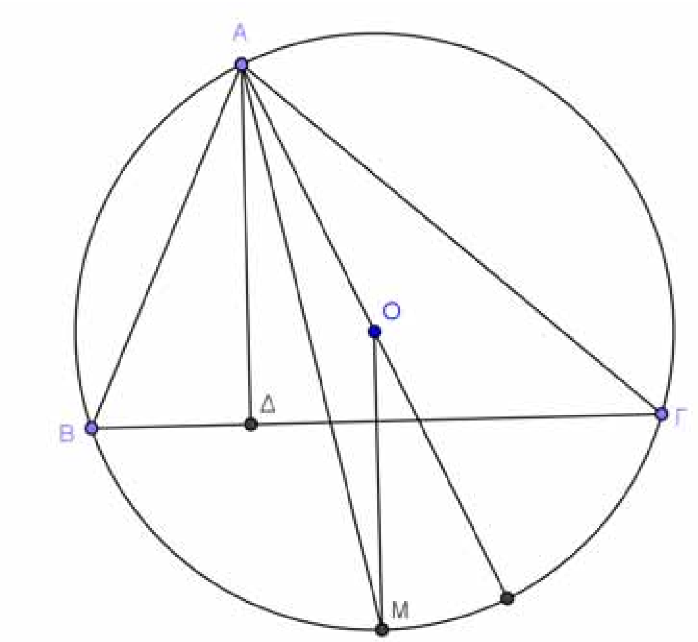
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Θεωρούμε το μέσο Μ του κυρτογώνιου τόξου ΒΓ και το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΟ. (Μονάδες 8)

β) $O\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B$ (Μονάδες 9)

γ) $\Delta\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με ΑΒ>ΒΓ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60°. Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου.

(Μονάδες 8)

ii. ΑΜ= $\frac{1}{4}$ ΑΓ (Μονάδες 7)

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

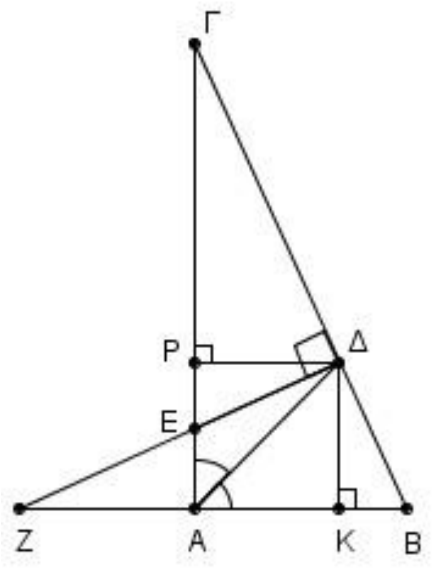
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. ‘Εστω ΔΚ και ΔΡ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$ (Μονάδες 8)

ii. ΔΕ=ΔΒ (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τα ύψη ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε το μέσο της πλευράς ΑΓ τότε :

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Αν η γωνία Β είναι 80^0 , να αποδείξετε ότι η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) έχουμε ότι $\hat{B} = 30^0$. Φέρουμε το ύψος ΑΗ και τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο ΑΜ, η οποία την τέμνει στο σημείο Ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

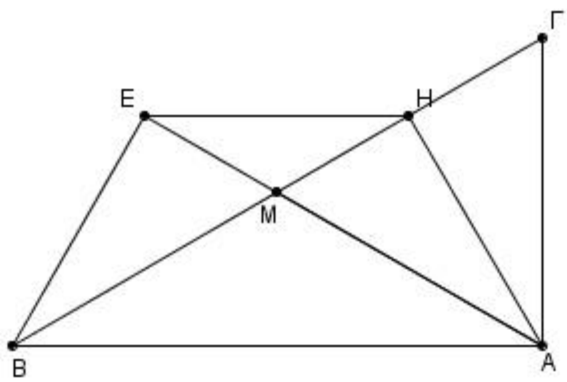
Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \dfrac{AB}{2}$, (Μονάδες 7)

β) ΑΗ=ΒΕ, (Μονάδες 7)

γ) το τετράπλευρο ΑΗΕΒ είναι εγγράψιμο, (Μονάδες 6)

δ) ΕΗ//ΑΒ. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Έστω σημείο Δ του τόξου ΑΒ τέτοιο ώστε ΔΒ⊥ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ⊥ΑΓ. (Μονάδες 8)

β) Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ το μέσον της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΟΜ= $\frac{AH}{2}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (η γωνία Β ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ. (Μονάδες 5)