ΘΕΜΑ 2 (1512)

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$.

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ **και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.**

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ **στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το** $-\frac{4}{3}$ **λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

Λύση:

α) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0$πότε η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές λύσεις:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2 \text{ ή } -1$$

β) $x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) > 0$.Γνωρίζουμε ότι ένα τριώνυμο εκτός των ριζών του είναι ετερόσημο του συντελεστή του x^2 ο οποίος είναι 1 > 0.

Συνεπώς $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

γ) Από το προηγούμενο σχήμα το $-\frac{4}{3}$ είναι λύση διότι ανήκει στο διάστημα των λύσεων, αφού είναι μικρότερο του -1.

Θέμα 2 (1513)

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) **με** $\alpha_1 = 1$ **και** $\alpha_3 = 9$.
α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.
β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu > 30$.

Λύση

α) Η α_νείναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω, τότε $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow 9 = 1 + 2\omega \Leftrightarrow \omega = 4$.

β) $\alpha_\nu > 30 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega > 30 \Leftrightarrow 1 + (\nu - 1)4 > 30 \Leftrightarrow 4\nu - 4 > 29 \Leftrightarrow \nu > \frac{33}{4} > \frac{32}{4} = 8$ άρα ο ν = 9 είναι ο μικρότερος ζητούμενος φυσικός αριθμός.

Θέμα 2 (1520)

Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο
Β: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:

α) Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα.
β) Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα.

Λύση: Από τα δεδομένα έχουμε ότι $P(A) = 50\%, P(B) = 40\%$και $P(A \cap B) = 10\%$

α) Από τον προσθετικό νόμο έχουμε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 80\%$
β) Το ενδεχόμενο να μη μαθαίνει κανένα από τα όργανα ο σπουδαστής είναι το $(A \cup B)'$και ισχύει ότι $P\big((A \cup B)'\big) = 1 - P\big((A \cup B)\big) = 1 - 80\% = 20\%$.

Θέμα 2 (1529)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, **για την οποία ισχύει:**
$f(0) = 5$ **και** $f(1) = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι α = - 2 και β = 5 .
β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x, y'y$.
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Λύση: α) Από τα δεδομένα έχουμε: $f(0) = 5 \Leftrightarrow a \cdot 0 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5$.Επίσης έχουμε $f(1) = 3 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3 \Leftrightarrow a + 5 = 3 \Leftrightarrow a = -2$.
β) Για τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$πρέπει να ισχύει $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ δηλαδή το σημείο $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.
Για τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα $y'y$πρέπει $x = 0$: $f(0) = 5$ άρα το σημείο $B(0,5)$.

ΘΕΜΑ 2 (1532) Δίνεται η συνάρτηση$f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης fκαι να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$.
β) Να βρείτε τις τιμές τουxγια τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

Λύση: Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει ο παρονομαστής του κλάσματος να μη γίνεται μηδέν, δηλαδή: $x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$άρα το πεδίο ορισμού της fείναι $A = \mathbb{R} - \{4\}$.

$$f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4} = \frac{x(x^2 - 16)}{x - 4} = \frac{x(x-4)(x+4)}{x - 4} = x^2 + 4x.$$

β) $f(x) = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 32 = 0$.Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου: $\Delta = 4^2 - 4(-32) = 144$ και$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 12}{2} = 4$ ή -8.

Θέμα 2 (1533)

Θεωρούμε την εξίσωση$x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$ **με παράμετρο** $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.
β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει: $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$.

Λύση: α) Για να έχει πραγματικές ρίζες αρκεί $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4(\lambda - 2) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + 8 \geq 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \lambda \leq 3$.
β) Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης: $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda - 2$και το άθροισμα των ριζών είναι $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -2$.Ισχύει ότι $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 - 2(-2) = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1 \leq 3$ το οποίο είναι δεκτό αφού για $\lambda \leq 3$η εξίσωση έχει ρίζες.

Θέμα 2 (1537)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.
α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.
β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = \frac{5}{2}$.

Λύση: α) Ισχύει ότι $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2) = f(1) = 2 \Rightarrow A = 2$.
β) $f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$.Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου: $\Delta = 25 - 16 = 9$. $x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = 2$ή $\frac{1}{2}$.

Θέμα 2 (1541)

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$**και**$2 \leq y \leq 3$**τότε:**
α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Λύση: α) Η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι Π = 2x + 2y και από τα δεδομένα έχουμε: $4 \leq x \leq 7 \Rightarrow 8 \leq 2x \leq 14$και$2 \leq y \leq 3 \Rightarrow 4 \leq 2y \leq 6$.Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις κατά μέλη έχουμε: $12 \leq 2x + 2y \leq 20$.Δηλαδή, η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι μεταξύ 12 και 20.
β) Το νέο παραλληλόγραμμο θα έχει περίμετρο:$2(x - 1) + 2 \cdot 3y = 2x - 2 + 6y$επιπλέον ισχύουν ότι $8 \leq 2x \leq 14 \kappa\alpha\iota 12 \leq 6y \leq 18$και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:
$20 \leq 2x + 6y \leq 32 \Leftrightarrow 18 \leq 2x - 2 + 6y \leq 30$.

Θέμα 2 (1542)

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$.
β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων$f(x) = \frac{3}{x}$**και**$g(x) = x^2 - x + 3$**έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το A(1,3).**

Λύση: α) $A = x^2(x - 1) + 3(x - 1) = (x - 1)(x^2 + 3)$.
β) Για τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων ισχύει ότι:$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x} = x^2 - x + 3 \Leftrightarrow 3 = x^3 - x^2 + 3x \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.Άρα μοναδικό σημείο τομής των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το $A(1, f(1)) = A(1,3)$.

Θέμα 2 (1544)

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$,για κάθε πραγματικό αριθμό x.
β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$.

Λύση: α) Το τριώνυμο $x^2 + 4x + 5$έχει διακρίνουσα $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$άρα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο ομόσημο με το συντελεστή του x^2,δηλαδή θετικό για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in \mathbb{R}$.
β) Εφόσον $x^2 + 4x + 5 > 0$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$και $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0$έχουμε:
$B = x^2 + 4x + 5 - (x^2 + 4x + 4) = 5 - 4 = 1$.

Θέμα 2 (1553)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$και$g(x) = x, x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, gτέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.
β) Αν Α, Ο, Β είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου Ο(0,0), να αποδείξετε ότι τα Α, Β είναι συμμετρικά ως προς Ο.

Λύση: α) Στα σημεία τομής τους θα ισχύει: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ή$x = 1$ή$x = -1$.Συνεπώς τα ζητούμενα σημεία τομής είναι Α(1,1), Ο(0,0) και Β(-1 , -1) .

β) Τα σημεία Α, Ο, Β είναι συνευθειακά, αφού ανήκουν και τα τρία στην ευθεία y=x. Για τις αποστάσεις ΑΟ, ΒΟ ισχύει $AO = \sqrt{2}, BO = \sqrt{2} = AO$οπότε τα σημεία Α και Β είναι συμμετρκά ως προς Ο.