Άσκηση 1102

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες

$$P(A) = \frac{3}{4},\ \ P(A - B) = \frac{5}{8}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ P(B) = \frac{1}{4}$$

α) Να υπολογίσετε την $P(A \cap B)$ (Μονάδες 9)

β) i) Να υπολογίσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: «Α ή Β» (Μονάδες 7)

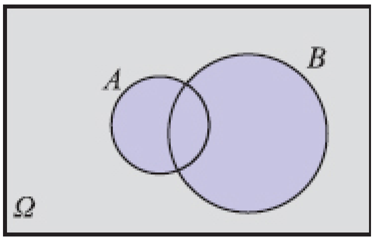
ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{5}{8} = \frac{3}{4} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

β) i) Το ενδεχόμενο «Α ή Β» πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B ,συμβολίζεται με $A \cup B$ και με διάγραμμα Venn παριστάνεται όπως στο παρακάτω σχήμα.



β) ii) Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{7}{8}$$

Άσκηση 1273

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν:

$|x - 3| \leq 2$ και $|y - 6| \leq 4$

α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$ (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y (Μονάδες 13)

Λύση

α)

$$|x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 3 \leq 2 \Leftrightarrow -2 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 2 + 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$$

$$|y - 6| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq y - 6 \leq 4 \Leftrightarrow -4 + 6 \leq y - 6 + 6 \leq 4 + 6 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 10$$

β) Η περίμετρος του ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y είναι

$\Pi = 2x + y + 2x + y = 4x + 2y$

Πολλαπλασιάζοντας με 4 τη σχέση $1 \leq x \leq 5$ έχουμε $4 \leq 4x \leq 20$

Πολλαπλασιάζοντας με 2 τη σχέση $2 \leq y \leq 10$ έχουμε $4 \leq 2y \leq 20$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τελευταίες έχουμε:

$$8 \leq 4x + 2y \leq 40$$

Άρα η μικρότερη τιμή της περιμέτρου είναι 8 και πραγματοποιείται όταν το $x = 1$ και το $y = 2$, ενώ η μεγαλύτερη είναι 40 και πραγματοποιείται όταν $x = 5$ και $y = 10$

Άσκηση 1275

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$ (Μονάδες 10)

Λύση

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τριώνυμο έχει διακρίνουσα θετική. Είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 25 + 8 = 33 > 0$$

β) Από τους τύπους του Vieta έχουμε ότι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{5}{2}$$
$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{2}$$

Για την παράσταση $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ έχουμε:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = -5$$

γ) Η εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$ θα έχει άθροισμα και γινόμενο ριζών τα εξής:

$$S' = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -5$$
$$P' = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

Άρα η εξίσωση είναι η:

$x^2 - S'x + P = 0$ δηλαδή $x^2 + 5x - 2 = 0$

Άσκηση 1276

Δίνεται η παράσταση

$$K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$$

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση K πρέπει να ισχύουν:

$x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ και $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Άρα το x μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές εκτός του 2 και του 3.

β) Η παράσταση K γράφεται ως εξής:

$$K = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} - \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3}$$

Όμως:

$-2 < x < 3 \Leftrightarrow 0 < x+2 < 5$ άρα $|x+2| = x+2$ για κάθε $-2 < x < 3$

$-2 < x < 3 \Leftrightarrow -5 < x-3 < 0$ άρα $|x-3| = -(x-3)$ για κάθε $-2 < x < 3$

Οπότε η παράσταση K γίνεται:

$$K = \frac{x+2}{x+2} - \frac{-(x-3)}{x-3} = 1+1 = 2$$

Άσκηση 1277

Δίνονται οι ανισώσεις $-x^2+5x-6 < 0$ (1) και $x^2-16 \leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2). (Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Το τριώνυμο $-x^2+5x-6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25-24 = 1$ και ρίζες τους αριθμούς

$$x_1 = \frac{-5+1}{-2} = 2 \ \textit{και} \ x_2 = \frac{-5-1}{-2} = 3$$

Κατασκευάζοντας τον πίνακα προσήμων βρίσκουμε ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι

$$x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

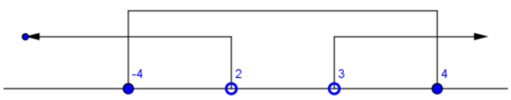
x	$-\infty$ 2 3 $+\infty$

$-x^2+5x-6$	-	0	+	0	-

Για την ανίσωση (2) έχουμε:

$$x^2-16 \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le 16 \Leftrightarrow |x| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le x \le 4$$

β)



Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι:

$$x \in [-4,2) \cup (3,4]$$

Άσκηση 1278

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $d(x,2)<1$

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$ (Μονάδες 10)

β) $x^2+4x+3<0$ (Μονάδες 15)

Λύση

α)

$d(x,-2)<1 \Leftrightarrow |x+2|<1 \Leftrightarrow -1<x+2<1 \Leftrightarrow -3<x<-1$

β) Είναι:

$x^2+4x+3=x^2+4x+4-1=(x+2)^2-1=(x+2-1)(x+2+1)=(x+1)(x+3)$

Όμως από το α) ερώτημα

$x<-1$ άρα $x+1<0$

$x>-3$ άρα $x+3>0$

Οπότε $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)<0$

Άσκηση 1281

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\varDelta=(\sqrt{3}+1)^2$ (Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο (Μονάδες 13)

Λύση

$\alpha)\ \varDelta=\beta^2-4\alpha\gamma=(\sqrt{3}-1)^2+4\sqrt{3}=\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}+1+4\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$

β) Το τριώνυμο έχει ρίζες:

$$x_1=\frac{-(\sqrt{3}-1)+\sqrt{3}+1}{2}=\frac{2}{2}=1\ \ και\ x_2=\frac{-(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)}{2}=\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$$

Οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

$$-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}=-(x-1)(x+\sqrt{3})$$

Άσκηση 1282

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2-2x-1$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση:

$$A(x)=\frac{x-1}{3x^2-2x-1}$$

και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $|A(x)|=1$ (Μονάδες 8)

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=(-2)^2+12=16$ και ρίζες τους αριθμούς

$$x_1=\frac{2+4}{6}=1\ \ και\ \ x_2=\frac{2-4}{6}=-\frac{1}{3}$$

Η παράσταση έχει νόημα για $x\neq 1$ και $x\neq -\frac{1}{3}$

Άρα παραγοντοποιείται ως εξής: $3x^2-2x-1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)=(3x+1)(x-1)$

$$A(x)=\frac{x-1}{3x^2-2x-1}=\frac{x-1}{(3x+1)(x-1)}=\frac{1}{3x+1}$$

γ)

$$|A(x)|=1\Leftrightarrow\left|\frac{1}{3x+1}\right|=1\Leftrightarrow|3x+1|=1\Leftrightarrow\begin{cases}3x+1=1\Leftrightarrow x=0\\ \text{ή}\\ 3x+1=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Άσκηση 1283

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3 (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της. (Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 4 + 12 = 16$ και ρίζες τους αριθμούς

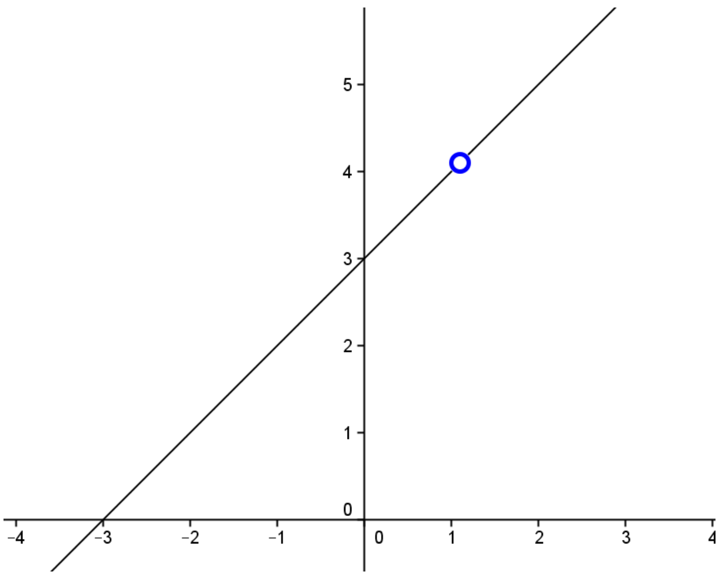
$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

Άρα παραγοντοποιείται ως εξής: $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$

β) Για να ορίζετε η συνάρτηση πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = x + 3\,, \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in A$$

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι η ευθεία $y = x + 3$ από την οποία εξαιρείται το σημείο με συντεταγμένες $(1,4)$ και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Άσκηση 1287

Δίνεται ο πίνακας

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα.

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων.

Α: ο διψήφιος να είναι άρτιος (Μονάδες 7)

Β: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιος του 3 (Μονάδες 9)

Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιος του 3 (Μονάδες 9)

Λύση:

Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από εννέα αριθμούς και είναι ο $\Omega = \{11,12,13,21,22,23,31,32,33\}$

Οι διψήφιοι άρτιοι αριθμοί του Ω είναι οι 12,22,32 άρα το ενδεχόμενο Α είναι το $A = \{12,22,32\}$ και η πιθανότητα του είναι

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Από τα στοιχεία του συνόλου Α μόνο ο 12 διαιρείται με το 3, άρα το ενδεχόμενο Β είναι το $B = \{12\}$ και η πιθανότητα του Β είναι:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9}$$

Οι αριθμοί του Ω που είναι πολλαπλάσια του 3 είναι οι 12,21,33 ενώ οι άρτιοι είναι οι 12,22,32 άρα το ενδεχόμενο Γ είναι το $\Gamma = \{12,21,22,32,33\}$ και η πιθανότητα του Γ είναι:

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{5}{9}$$