1089

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$

α) Να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές .

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{|x-5|}{x-5} + \dfrac{|x-10|}{x-10}$

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $5 < x < 10$, άρα $5 < x \Leftrightarrow x-5 > 0$ οπότε και $|x-5| = x-5$ και

$x < 10 \Leftrightarrow x-10 < 0$ οπότε και $|x-10| = -x+10$

β) $A = \dfrac{|x-5|}{x-5} + \dfrac{|x-10|}{x-10}$

Πρέπει $x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$ και $x-10 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 10$ τα οποία ισχύουν

Για $5 < x < 10$

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{-x+10}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{-(x-10)}{x-10} = 1-1 = 0$$

1090

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \dfrac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 12)

Λύση

α) Πρέπει $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq -1$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f = \mathbb{R} - \{-1,1\}$ ή αλλιώς το

$A_f = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

β) Αφού το σημείο $\mathrm{M}\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τότε

$f(a) = \frac{1}{8}$ με $a \neq 1$ και $a \neq -1$.

$$f(a) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2-1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow a^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow a^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm 3$$

1091

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $\mathrm{A} = 2x - 3$

(Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

Λύση

Είναι $1 < x < 2$, άρα $1 < x \Leftrightarrow x - 1 > 0$ οπότε και $|x-1| = x - 1$ και

$x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$ οπότε και $|x-2| = -x + 2$

Τότε $A = |x-1| - |x-2| = x - 1 - (-x+2) = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$.

β) Όταν είναι $x < 1$ τότε και $x < 2$.

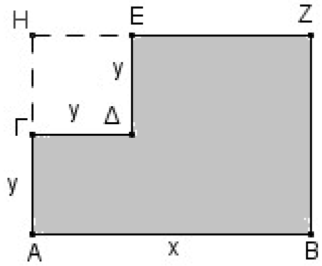
Τότε $x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0$ και $|x-1| = -x + 1$

$x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$ και $|x-2| = -x + 2$

Τότε $A = |x-1| - |x-2| = -x + 1 - (-x+2) = -x + 1 + x - 2 = -1$,

1092

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .



α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4$ (Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $\mathrm{ZB} = \mathrm{E\Delta} + \Gamma\mathrm{A} = y + y = 2y$

$\mathrm{EZ} = \mathrm{HZ} - \mathrm{HE} = x - y$.

Η περίμετρος του ΕΖΒΑΓΔ είναι ίση με

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BZ} + \mathrm{ZE} + \mathrm{E\Delta} + \Delta\Gamma + \Gamma\mathrm{A} = x + 2y + x - y + y + y + y = 2x + 4y$$

β) $5 < x < 8 \xrightarrow{\varepsilon\pi\acute{\iota}\ 2} 2 \cdot 5 < 2 \cdot x < 2 \cdot 8 \Rightarrow 10 < 2 \cdot x < 16 \quad (1)$

$1 < y < 2 \xrightarrow{\varepsilon\pi\acute{\iota}\ 4} 4 \cdot 1 < 4 \cdot y < 4 \cdot 2 \Rightarrow 4 < 2 \cdot y < 8 \quad (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε

$$10 + 4 < 2x + 4y < 16 + 8 \Rightarrow 14 < \Pi < 24$$

1093

Δίνονται οι αριθμοί: $\mathrm{A} = \dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$, $\mathrm{B} = \dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:

i) $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \dfrac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \dfrac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

(Μονάδες 9)

Λύση

α)

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\frac{1}{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{5-\sqrt{5}}=\frac{1\cdot\left(5-\sqrt{5}\right)+1\cdot\left(5+\sqrt{5}\right)}{\left(5+\sqrt{5}\right)\cdot\left(5-\sqrt{5}\right)}=\frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{10}{25-5}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\left(\frac{1}{5+\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{1}{5-\sqrt{5}}\right)=\frac{1\cdot 1}{\left(5+\sqrt{5}\right)\cdot\left(5-\sqrt{5}\right)}=\frac{1}{5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1}{25-5}=\frac{1}{20}$$

β) Η εξίσωση με ρίζες x_1 και x_2 είναι η $x^2-Sx+P=0$ όπου $S=x_1+x_2$ και $P=x_1\cdot x_2$ (τύποι Vieta).

Εδώ $S=\mathrm{A}+\mathrm{B}=\frac{1}{2}$ και $P=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\frac{1}{20}$. Η εξίσωση είναι η

$$x^2-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{20}=0\Leftrightarrow 20x^2-10x+1=0$$

1096

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y=35+0,8x$.

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Για $x=25$ $y=35+0,8\cdot 25=35+20=55$ χιλιόμετρα .

β) Για $y=75$

$$75=35+0,8\cdot x\Leftrightarrow 75-35=0,8\cdot x\Leftrightarrow 40=0,8\cdot x\Leftrightarrow x=\frac{40}{0,8}=50 \text{ λεπτά}$$

1097

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+\lambda x-5$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0=1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ.

(Μονάδες 12)

β) Για λ=3, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Για $x_0 = 1$ η $2x_0{}^2 + \lambda x_0 - 5 = 0$ μας δίνει

$$2\cdot 1^2 + \lambda\cdot 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

β) Για $\lambda = 3$ το τριώνυμο γίνεται $2x^2 + 3x - 5$ με διακρίνουσα

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4\cdot 2\cdot(-5) = 9 + 40 = 49$ και ρίζες

$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{49}}{2\cdot 2} = \dfrac{-3 \pm 7}{4}$ δηλαδή $x_1 = \dfrac{-3+7}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$ και

$x_2 = \dfrac{-3-7}{4} = \dfrac{-10}{4} = \dfrac{-5}{2}$.

Άρα

$$2x^2 + 3x - 5 = 2\cdot(x-1)\left(x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right) = 2\cdot(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x-1)\left(2\cdot x + 2\cdot\frac{5}{2}\right) =$$

$$= (x-1)(2\cdot x + 5)$$

1100

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1) , με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \dfrac{\beta}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $\alpha = 1, \beta = -5\beta, \gamma = 2\beta^2$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5\beta)^2 - 4\cdot 2\cdot\left(2\beta^2\right) = 25\beta^2 - 16\beta^2 = 9\beta^2 > 0 \text{ γιατί } \beta > 0$$

Έχει δύο ρίζες άνισες $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-5\beta) \pm \sqrt{9\beta^2}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5\beta \pm 3\beta}{4}$ δηλαδή

$x_1 = \dfrac{5\beta + 3\beta}{4} = \dfrac{8\beta}{4} = 2\beta$ και $x_2 = \dfrac{5\beta - 3\beta}{4} = \dfrac{2\beta}{4} = \dfrac{\beta}{2}$.

β) Οι αριθμοί α ,β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

Για να είναι οι αριθμοί $x_1,\ \beta,\ x_2$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου πρέπει

$\beta^2 = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow \beta^2 = 2\beta \cdot \dfrac{\beta}{2} \Leftrightarrow \beta^2 = \beta^2$ το οποίο ισχύει

1101

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$ (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1,\ \beta,\ x_2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $\alpha = 1, \beta = -2\beta, \gamma = \beta^2 - 4$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\beta^2 - 4\right) = 4\beta^2 - 4\beta^2 + 16 = 16 > 0 \text{ γιατί } \beta > 0$$

Έχει δύο ρίζες άνισες $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-2\beta) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2\beta \pm 4}{2}$ δηλαδή

$x_1 = \dfrac{2\beta - 4}{2} = \beta - 2$ και $x_2 = \dfrac{2\beta + 4}{2} = \beta + 2$.

β) Οι αριθμοί α ,β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$

Για να είναι οι αριθμοί $x_1,\ \beta,\ x_2$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει

$$\beta=\frac{x_1+x_2}{2}\Leftrightarrow\beta=\frac{\beta-2+\beta+2}{2}\Leftrightarrow\beta=\frac{2\beta}{2}\Leftrightarrow\beta=\beta$$ το οποίο ισχύει