1062

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

Προτεινόμενη λύση

α) Έχουμε $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow -1+3<y-3+3<1+3 \Leftrightarrow \boxed{2<y<4}$

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι το γινόμενο των διαστάσεών του. Οπότε $E=xy$. Επειδή $1<x<3$ και $2<y<4$ και όλα τα μέλη είναι θετικά, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις έχουμε:

$1\cdot 2<xy<3\cdot 4 \Leftrightarrow 2<E<12$.

1064

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1=19$ και $\alpha_{10}-\alpha_6=24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=6$

β) Να βρείτε τον α_{20}

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

Προτεινόμενη λύση

α) Εφαρμόζουμε τον τύπο του νιοστού όρου $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$ διαδοχικά για $\nu=10$ και $\nu=6$.

- Για $\nu=10$ παίρνουμε: $\alpha_{10}=\alpha_1+(10-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_{10}=19+9\omega$
- Για $\nu=6$ παίρνουμε: $\alpha_6=\alpha_1+(6-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_6=19+5\omega$

  Οπότε η σχέση $\alpha_{10}-\alpha_6=24$ γράφεται:

  $\alpha_{10}-\alpha_6=24 \Leftrightarrow 19+9\omega-(19+5\omega)=24 \Leftrightarrow$
  $19+9\omega-19-5\omega=24 \Leftrightarrow 4\omega=24 \Leftrightarrow \omega=6$

β) Ο τύπος του νιοστού όρου για $\alpha_1=19$ και $\omega=6$ γίνεται:

$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu=19+(\nu-1)6$. Συνεπώς για $\nu=20$ έχουμε:

$\alpha_{20}=19+(20-1)6=19+19\cdot 6=19(1+6)=19\cdot 7 \Leftrightarrow \alpha_{20}=133$.

γ) Στον τύπο $S_\nu=\frac{\nu}{2}\left(2\alpha_1+(\nu-1)\omega\right)$ για $\nu=20$ έχουμε:

$$S_{20}=\frac{20}{2}\left(2\cdot 19+(20-1)6\right)=10\left(2\cdot 19+19\cdot 6\right)=10\left(8\cdot 19\right)\Leftrightarrow S_{20}=1520$$

1067

Δίνεται η παράσταση: $\mathbf{K}=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$.

β) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση $\mathbf{K}$;

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\mathbf{K}$.

Προτεινόμενη λύση

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $2x^2-3x-2$ είναι: $\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)=9+16=25>0$ και συνεπώς το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$x_{1,2}=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2}=\dfrac{3\pm 5}{4}=\begin{cases}x_1=\dfrac{3+5}{4}=2\\ x_2=\dfrac{3-5}{4}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Τότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$2(x-x_1)(x-x_2)=2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-2)(2x+1)$$

β) Η παράσταση $\mathbf{K}$ ορίζεται για εκείνα τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ο παρονομαστής της παραμένει διάφορος του μηδενός. Οι ρίζες του παρονομαστή, είναι οι ρίζες του τριωνύμου του πρώτου ερωτήματος, δηλαδή οι $x_1=2$ και $x_2=-\dfrac{1}{2}$. Συνεπώς η παράσταση $\mathbf{K}$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2},2\right\}$.

γ) Η παράσταση θα απλοποιηθεί, παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρονομαστή. Λόγω και του πρώτου ερωτήματος, έχουμε: $\mathbf{K}=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}=\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(2x+1)}=\dfrac{x-2}{2x+1}$

1070

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ με $\beta\neq 0$ και $\delta\neq\gamma$ ώστε να ισχύουν:

$\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}=4$ και $\dfrac{\gamma}{\delta-\gamma}=\dfrac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$

Προτεινόμενη λύση

α) Από τις δοθείσες έχουμε: $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Leftrightarrow \alpha+\beta=4\beta \Leftrightarrow \alpha=3\beta$ και

$\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma=\delta-\gamma \Leftrightarrow \delta=5\gamma$.

β) Έχουμε $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{\beta(\delta-\gamma)}\overset{(\alpha)}{=}=\frac{\gamma(3\beta+\beta)}{\beta(5\gamma-\gamma)}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$.

1074

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$.

β) Αν x,y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

Προτεινόμενη λύση

α) Έχουμε $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow -1+3<y-3+3<1+3 \Leftrightarrow \boxed{2<y<4}$

β) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι με διαστάσεις x,y είναι $\Pi=2x+2y=2(x+y)$. Τότε από τις σχέσεις που δόθηκαν για τις διαστάσεις, έχουμε:

$$\begin{cases}1<x<3\\2<y<4\end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} 3<x+y<7 \Rightarrow 2\cdot 3<2(x+y)<2\cdot 7 \Rightarrow 6<\Pi<14$$

1077

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|<4$.

β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$

Προτεινόμενη λύση

α) Έχουμε:

$$\begin{aligned}&|x-5|<4 \Leftrightarrow\\&-4<x-5<4 \Leftrightarrow\\&-4+5<x-5+5<4+5 \Leftrightarrow\\&1<x<9\end{aligned}$$

β) Αφού ο α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση ισχύει: $1<\alpha<9$. Οπότε αφού τα μέλη είναι θετικά, αντιστρέφοντας και αλλάζοντας φορά στην ανίσωση παίρνουμε:

$1<\alpha<9 \Leftrightarrow 1>\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$

1080

Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\dfrac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y=2x$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$$

Προτεινόμενη λύση

α) Αρχικά πρέπει $x-4y\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4y$. Τότε:

$$\begin{aligned}&\frac{4x+5y}{x-4y}=-2 \Leftrightarrow 4x+5y=-2(x-4y) \Leftrightarrow\\&4x+5y=-2x+8y \Leftrightarrow 8y-5y=4x+2x \Leftrightarrow\\&3y=6x \Leftrightarrow y=2x\end{aligned}$$

β) Χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}&A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}\overset{y=2x}{=}\frac{2x^2+3(2x)^2+x\cdot 2x}{x\cdot 2x}=\\&\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8\end{aligned}$$

1082

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$.

Προτεινόμενη λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ο παρονομαστής παραμένει διάφορος του μηδενός. Βρίσκουμε λοιπόν για ποια $x\in\mathbb{R}$ μηδενίζεται ο παρονομαστής. Έχουμε λοιπόν να λύσουμε την εξίσωση $x^2-x-6=0$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25>0$ και συνεπώς το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το

$A = \mathbb{R} = \{-2,3\}$.

β) Για τα $x \neq -2,3$ η συνάρτηση απλοποιείται και γράφεται:

$f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6} = \frac{x+2}{(x-3)(x+2)} = \frac{1}{x-3}$. Τότε $f(2) + f(4) = \frac{1}{2-3} + \frac{1}{4-3} = -1 + 1 = 0$.

1086

Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x+4$, $\Gamma = x+8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε την τιμή του x.

β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν),

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω.

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

Προτεινόμενη λύση

α) Οι αριθμοί A, B, Γ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και συνεπώς ο B είναι ο αριθμητικός μέσος των A και Γ. Ισχύει λοιπόν:

$$B = \frac{A+\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2B = A + \Gamma \Leftrightarrow$$
$$2(x+4) = 1 + x + 8 \Leftrightarrow$$
$$2x + 8 = x + 9 \Leftrightarrow x = 1$$

β) Για $x = 1$ οι τρεις αριθμοί είναι οι $A = 1$, $B = 5$ και $\Gamma = 9$.

i) Η διαφορά της προόδου είναι $\omega = B - A = 5 - 1 = 4$.

ii) Με $\alpha_1 = A = 1$ και $\omega = 4$, ο νιοστός όρος δίνεται από τον τύπο

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 1 + (\nu - 1)4 = 1 + 4\nu - 4 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 4\nu - 3$. Οπότε για $\nu = 20$ έχουμε ότι:

$\alpha_{20} = 4 \cdot 20 - 3 = 77$.

1088

α) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

β) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

γ) Να βρεθεί ο αριθμός $\mathbf{x}$ ώστε οι αριθμοί $\mathbf{4-x}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{2}$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

Προτεινόμενη λύση

α) Οι αριθμοί $\mathbf{4-x}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{2}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, και συνεπώς ο $\mathbf{x}$ είναι ο αριθμητικός μέσος των $\mathbf{4-x}$ και $\mathbf{2}$. Έχουμε λοιπόν:

$$\mathbf{x=\frac{4-x+2}{2}\Leftrightarrow 2x=6-x\Leftrightarrow 3x=6\Leftrightarrow x=2}.$$

β) Οι αριθμοί $\mathbf{4-x}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και συνεπώς ισχύει:
$\mathbf{x^2=\left(4-x\right)2\Leftrightarrow x^2=-2x+8\Leftrightarrow x^2+2x-8=0}$. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα
$\mathbf{\Delta=2^2-4\cdot1\cdot\left(-8\right)=36>0}$ και συνεπώς έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$\mathbf{x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm6}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-2+6}{2}=2\\ x_2=\dfrac{-2-6}{2}=-4\end{cases}}$$

γ) Λόγω των δύο πρώτων ερωτημάτων έχουμε ότι:

- Οι αριθμοί $\mathbf{4-x}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{2}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου για $\mathbf{x=2}$, ενώ
- είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου για $\mathbf{x=2}$ και $\mathbf{x=-4}$.

Επαλήθευση:

Για $\mathbf{x=2}$ οι τρεις αριθμοί είναι οι $\mathbf{2,2,2}$ και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\boldsymbol{\omega=0}$ και γεωμετρικής με λόγο $\boldsymbol{\lambda=1}$.